XXVI. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny
Somorja, 2017

9. évfolyam

1. feladat
Adott egy síkon 2017 (különböző) pont úgy, hogy nem esik mind egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy meg lehet adni a síkon olyan körlapot, amelynek határán rajta van az adott pontok közül legalább három, de a belsejében egy sem.

Dr. Kántor Sándor, Debrecen

Megoldás
Vizsgáljuk meg az adott pontokból képezhető pontpárok távolságát. Mivel ezekből csak véges sok van, nyilván van köztük olyan, aminél nincs kisebb. Legyen ez $|AB|$.

Az $|AB|$ átmérőjű kör belsejében nincs adott pont, határán van kettő.

Az adott pontok között van olyan P pont, amelyik nincs rajta az AB egyenesen (ugyanis nincs minden pont rajta egy egyenesen).

Az $\overline{AB}$ szakasz O felezőpontjából induló, AB egyenesre merőleges f félegyenes legyen az AB egyenesnek ugyanazon a partján, mint a P pont.

Az f félegyenesen levő K középpontú, $|AK|$ sugarú k körlap alkalmas K-val a keresett körlapot jelenti. Ugyanis k-nak az $\overline{AB}$ húrral lemetszett kisebbik szeletének belseje az $|AB|$ átmérőjű kör belsejében van, ahol nincs adott pont, a nagyobbik szeletében az $|OK|$ nullától induló növelésével akkor kapjuk az alkalmas K-t, ha a határon először jelenik meg valamilyen adott pont: egy C pont, és esetleg vele egyszerre több is. Tehát k belsejében nincs adott pont, határán pedig legalább 3: A, B, C.

2. feladat
Az ABC derékszögű háromszögben a CB befogó felezőpontja M, az AC befogó felezőpontja N, ahol $|BN| = 19$ és $|AM| = 22$. Mekkora az AB átfogó hossza?

Dr. Kántor Sándorné, Debrecen

Megoldás
Legyen $|BC| = 2a$, $|AC| = 2b$.

Pitagorasz tétele szerint $19^2 = (2a)^2 + b^2$

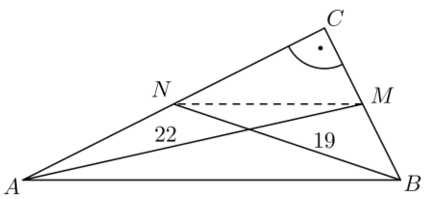
valamint $22^2 = a^2 + (2b)^2$.

Ezeket összeadva $5(a^2 + b^2) = 19^2 + 22^2 = 845$,

tehát $a^2 + b^2 = 169$, és innen $|MN| = 13$.

Mivel $|AB|^2 = (2a)^2 + (2b)^2 = 4(a^2 + b^2) = 4 \cdot 169$,

így $|AB| = 2 \cdot 13 = 26$. (Vagy: $|AB| = 2 \cdot 13 = 26$, mivel MN az ABC háromszög középvonala.)



3. feladat
A táblára felírtunk 2015 darab *D* betűt, 2016 darab *B* betűt és 2017 darab *C* betűt. Ketten játszanak. A soron levő játékos letöröl 2 *nem egyforma* betűt és a harmadikat írja helyükbe. Pld. letöröl egy *D*-t és egy *B*-t és felír egy darab *C*-t. A játék befejeződik, ha csak egyfajta betű maradt a táblán. Ha *D* betű maradt, akkor a kezdő játékos nyer, ha *B* maradt, akkor a második nyer, *C* betű esetén döntetlen. Kinek van nyerő stratégiája? Indokoljátok!

Mészáros József, Jóka

Megoldás
A játék kezdetén sok betű van, pontosan 2015+2016+2017. Könnyen látható, hogy minden lépés után a betűk mennyiségének összege 1-el csökken, tehát a játék végén csak 1 betű marad.

Kezdetben a betűk paritása *n, p, n*. Egy lépésben minden betű száma ±1-el változik, így a paritás *n, p, n* – ről *p, n, p* – re változik, stb.
Tehát a *B* betűk száma mindig különbözik a *D* és *C* betűkétől – ezek paritása mindig egyforma. A játék végén két betűből 0 darab lesz, tehát mindkettő paritása *p*. Ez csak a *D* és *C* betűkkel érhető el, tehát marad a *B* betű, mégpedig a játék bármilyen lefolyása után. Mivel a játék lefolyásától függetlenül, mindig csak a *B* betű(k) marad(nak), ezért csak a második nyerhet. Tehát nyerő stratégiája annak a játékosnak van, aki hagyja a másikat kezdeni.

4. feladat

A valós számok halmazán oldjuk meg a $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget!

Bálint Béla, Zsolna

Megoldás.
Természetesen $x \neq 0$.

Ha $x<0$, akkor $\frac{1}{x}<0$, ez pedig ellentmondáshoz vezet: $0 \leq \sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}<0$. Tehát $x>0$.

Egyúttal $0 \leq \frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}$, tehát $x^2 \leq \frac{4}{3}$ és innen $x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, mivel x pozitív.

Az adott egyenlőtlenséget négyzetre emelve kapjuk: $\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{4}$, innen $\frac{1}{x}<1$, végül $x>1$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $x \in \left(1\,;\,2/\sqrt{3}\right\rangle$.

5. feladat
Az *A* természetes szám *n* darab egyforma számjegyből áll, a *B* természetes szám szintén *n* darab egyforma számjegyből áll, a *C* természetes számot pedig 2*n* darab egyforma számjegy alkotja. Ugyanakkor $n \geq 2$ esetén $A^2+B=C$ is teljesül. Hány ilyen számjegy hármas teljesíti a feltételeket?

Tóth Sándor, Kisvárda

Megoldás
Legyen $A=\underbrace{x\ldots x}_{n}$, $B=\underbrace{y\ldots y}_{n}$, $C=\underbrace{z\ldots z}_{2n}$, ahol x,y,z számjegyek, tehát

$A=\underbrace{1\ldots1}_{n}\cdot x=\frac{10^n-1}{9}\cdot x$, $B=\frac{10^n-1}{9}\cdot y$, $C=\frac{10^{2n}-1}{9}\cdot z$. Ezeket az $A^2+B=C$ egyenlőségbe helyettesítve

kapjuk $\frac{(10^n-1)^2}{81}x^2+\frac{10^n-1}{9}y=\frac{10^{2n}-1}{9}z$.

Beszorozva 81-el és osztva (10^n-1)-el kapjuk: $(10^n-1)x^2+9y=9(10^n+1)z$, majd rövid átalakítások után

(*) $\quad (10^n-1)(x^2-9z)=9(2z-y)$.

Ha $x^2-9z=0$, akkor szintén $2z-y=0$ és ez megoldást ad minden $n \geq 2$-re, mégpedig
$z=1$, $x=3$, $y=2$, vagy $z=4$, $x=6$, $y=8$ megoldásokat.

Ha $x^2-9z \neq 0$, akkor az *n* paraméterre két esetet vizsgálunk meg.

a) $n=2$ esetén az (*) egyenlet alakja $11(x^2-9z)=2z-y$, tehát 11 osztja a $(2z-y)$-t. Ez kétféleképpen lehetséges: vagy $2z-y=0$, és ekkor $x^2-9z=0$, ami a feljebb említett megoldásokat adja, vagy $2z-y=11$ (ugyanis $-9 \leq 2z-y \leq 18$). Az utóbbi esetben $x^2-9z=1$ és mivelhogy x,y,z számjegyek, egyetlen megoldás van: $z=7$, $x=8$, $y=3$.

b) $n \geq 3$ esetén az (*) egyenletben $10^n-1 \geq 999$, tehát csak a $2z-y=0$ és $x^2-9z=0$ ad megoldást, amit már viszont feljebb vizsgáltunk.

Összegezve:
Minden $n \geq 2$-re két megoldás van, mégpedig $z=1$, $x=3$, $y=2$, és $z=4$, $x=6$, $y=8$, viszont $n=2$ esetén $z=7$, $x=8$, $y=3$ számjegy hármas is megoldás.

6. feladat

Határozzuk meg az összes olyan n természetes számot, amelyekre $n^2-10n+23$, $n^2-9n+31$ és $n^2-12n+46$ prímszámok!

Kiss Alexandra és Fedorszki Ádám, Beregszász

Megoldás

Az adott három szám összege

$n^2-10n+23+n^2-9n+31+n^2-12n+46=\ 3n^2-31n+100=\ =2n^2-30n+n(n-1)+100$.

Itt minden összeadandó páros, tehát az összeg páros.

Ha a három szám mindegyike prímszám, akkor pontosan az egyik egyenlő kettővel.

Sem az $n^2-12n+46=2$ egyenletnek sem pedig az $n^2-9n+31=2$ egyenletnek nincs természetes gyöke. Tehát $n^2-10n+23=2$, és innen $n=3$ vagy $n=7$.

Még meg kell vizsgálni, hogy ezek prímszámokat adnak-e.

Ha $n=3$, akkor $n^2-9n+31=13$ és $n^2-12n+46=19$, tehát prímszámok.

Ha $n=7$, akkor $n^2-9n+31=17$ és $n^2-12n+46=11$, tehát prímszámok.

Válasz: a keresett számok $n=3$ és $n=7$.

10. évfolyam

1. feladat

Adott a síkon 2017 (különböző) pont úgy, hogy bármely 3 közül kiválasztható 2, melyek távolsága 1-nél kisebb. Bizonyítsátok be, hogy a 2017 pont között található 1009 olyan, amelyek egységsugárú körben lesznek.

Mészáros József, Jóka

Megoldás

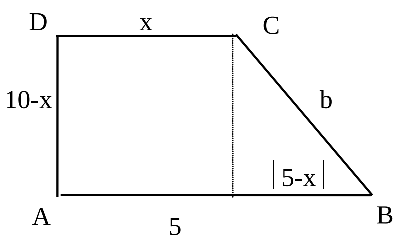
Legyenek A és B a 2017 pont közül a legtávolabb elhelyezkedő pontok és írjunk köréjük $k(A;1)$ és $l(B;1)$ köröket. Legyen C egy tetszőleges pontja az adott ponthalmaznak. A C pont $k(A;1)$-be vagy $l(B;1)$-be fog tartozni (ellenkező esetben a feladat feltétele nem teljesülne). Következésképpen a 2017 pont közül legalább 1009 e körök valamelyikébe fog tartozni.

2. feladat

Egy derékszögű trapéz egyik alapja 5 *cm*, a másik alap és a derékszögű szár összege 10 *cm*. Mekkora lehet a trapéz területének legnagyobb értéke? Mekkora lehet a trapéz kerületének legkisebb értéke?

Dr. Katz Sándor, Bonyhád

Megoldás



Ha a másik alap x, akkor a derékszögű szár $10-x$. Így a terület $t=0{,}5\cdot(5+x)(10-x)=\ =0{,}5\cdot(50+5x-x^2)\ \ =\frac{225}{8}-\frac{1}{2}\cdot(x-\frac{5}{2})^2$.

Ennek a maximuma $\dfrac{225}{8}=28{,}125\,\text{cm}^2$.

Fejezzük ki a trapéz nem derékszögű b szárát:

$b^2=(10-x)^2+(5-x)^2=2x^2-30x+125=$

$=2(x-\frac{15}{2})^2+12{,}5$. A trapéz kerülete

$k=15+b$. Ez $x=\frac{15}{2}$ -nél minimális és ekkor

$k_{\min}=15\,cm+\sqrt{12{,}5}\,cm\doteq 18{,}54\,cm$.

3. feladat

Oldjátok meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{6}{\sqrt{x-2017}-9}+\frac{1}{\sqrt{x-2017}-4}+\frac{7}{\sqrt{x-2017}+4}+\frac{12}{\sqrt{x-2017}+9}=0\ .$$

Nemecskó István, Budapest

Megoldás. Természetesen $x \geq 2017$ és vezessük be a $\sqrt{x-2017}=a$ jelölést.
Ekkor $a \geq 0$, $a \neq 4$, $a \neq 9$.
Így $\frac{6}{a-9}+\frac{1}{a-4}+\frac{7}{a+4}+\frac{12}{a+9}=0$.
Innen: $6(a+9)(a^2-16)+(a+4)(a^2-81)+7(a-4)(a^2-81)+12(a-9)(a^2-16)=0$,
$(a^2-16)(6a+54+12a-108)+(a^2-81)(a+4+7a-28)=0$,
$(a^2-16)(18a-54)+(a^2-81)(8a-24)=0$,
$18(a^2-16)(a-3)+8(a^2-81)(a-3)=0$,
$(a-3)(18a^2-18\cdot 16+8a^2-8\cdot 81)=0$,
$(a-3)(26a^2-936)=0$,
tehát $26(a-3)\cdot(a^2-36)=0$.
Ebből $a=3$ vagy $a=6$ (mivel $a \geq 0$).
Ha $a=3$, akkor $x=2026$. Ha $a=6$, akkor $x=2053$.
A valós számok halmazán **két megoldás van**: $x=2026$ és $x=2053$.

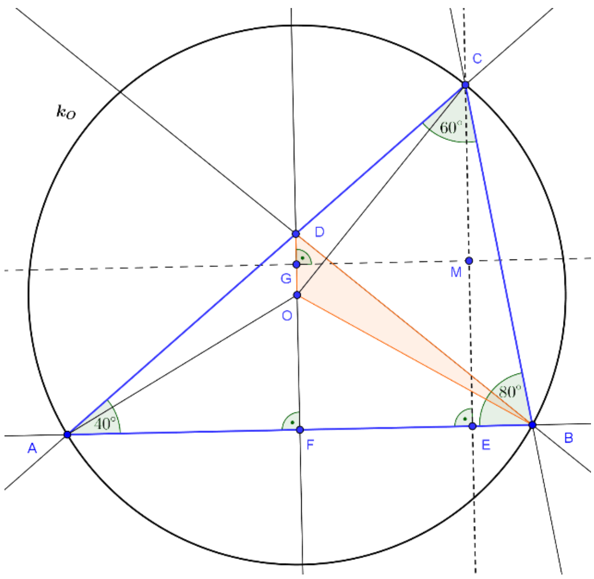
4. feladat
Van-e 1000 olyan egymást követő egész szám, melyek között pontosan 5 prímszám van?
Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás.
Először is van 1000 olyan egymást követő egész szám, melyek között **nincs** prímszám, nevezetesen pld. ezek: $1001!+2,\ 1001!+3,\ 1001!+4,\ \ldots,\ 1001!+1001$.
„Léptessük” a megadott 1000 számot tartalmazó blokkot 1-gyel lefele, azaz mindegyik szám helyett 1-gyel kisebbet veszünk.
Ilyen léptetésnél a blokkban levő prímek száma maximum 1-gyel változhat, mert egy számot elhagyunk és beveszünk helyette egy másik számot.
Vegyük észre, hogy az első 1000 pozitív egész szám között **több mint 5** prímszám van.
Tehát lefele lépkedve van olyan blokk, amelyben **pontosan** 5 prímszám van.

Másik megoldás.
Igen, pld. ezek: $-988, -987, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, 11$.

5. feladat
Az ABC háromszögben $CAB\measuredangle = 40°$ és $CBA\measuredangle = 80°$, a háromszög körülírt körének középpontja az O pont. $CBA\measuredangle$ szögfelezője a D pontban metszi az AC oldalt. Bizonyítsátok be, hogy a DOB háromszög körülírt körének középpontja az ABC háromszög C pontból induló magasságvonalára illeszkedik!
Bíró Bálint, Eger

Megoldás. A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk (1. ábra).



1. ábra

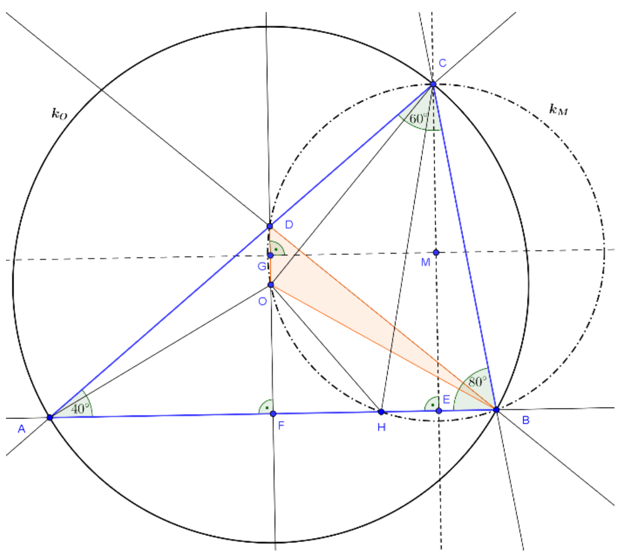
Az ABC háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért $ACB\measuredangle = 60°$.
Ez azt is jelenti, hogy az ABC háromszög hegyesszögű háromszög, ezért az ábrán k_O-val jelölt körülírt körének O középpontja a háromszög belső pontja, a C pontból induló magasságvonal E-vel jelölt talppontja pedig az AB szakasz belső pontja. 1 pont
A BD egyenes felezi a $CBA\measuredangle$-et, így $DBA\measuredangle = 40°$, ebből rögtön következik, hogy a DAB háromszög egyenlő szárú háromszög, tehát $DA = DB$.
Eszerint az AB szakasz OF felezőmerőlegesére illeszkedik a D pont, mégpedig úgy, hogy az O pont a DF szakasz belső pontja, hiszen ellenkező esetben a k_O kör O középpontja az ABC háromszög külső pontja lenne. 1 pont

A DO szakasz felezőpontját G-vel jelöltük, a DOB háromszög körülírt körének középpontja illeszkedik a DO szakasz felezőmerőlegesére, ez az egyenes az ABC háromszög C pontból induló magasságvonalát az M pontban metszi.
A feladat megoldásához elegendő bizonyítani, hogy az M pont a DOB háromszög körülírt körének középpontja. 1 pont

Ehhez először kiszámítjuk a DOB háromszög szögeit.
A középponti és kerületi szögek összefüggése szerint az AOB egyenlőszárú háromszögben $AOB\measuredangle = 120°$, ezért $FOB\measuredangle = 60°$, ebből pedig $DOB\measuredangle = 120°$ adódik. A DFB derékszögű háromszögben pedig $DBF\measuredangle = 40°$, és így $FDB\measuredangle = ODB\measuredangle = 50°$.
A DOB háromszög két szöge tehát $DOB\measuredangle = 120°$ és $ODB\measuredangle = 50°$, ezzel azt kapjuk, hogy $DBO\measuredangle = 10°$. 1 pont

Ugyancsak a középponti és kerületi szögek összefüggése miatt az AOC egyenlőszárú háromszögben $AOC\measuredangle = 160°$, így $ACO\measuredangle = DCO\measuredangle = 10°$.
Azt kaptuk tehát, hogy az OD egyenes ugyanazon oldalán fekvő C és B pontokból az OD szakasz egyaránt 10°-os szögben látszik, hiszen $DBO\measuredangle = DCO\measuredangle = 10°$, ez pedig azt jelenti, hogy a DOB háromszög körülírt körére illeszkedik a C pont. 1 pont

Ezután megrajzoljuk a DOB háromszög k_M-mel jelölt körülírt körét, amelynek az AB oldallal való második metszéspontját a 2. ábrán H-val jelöltük.



2. ábra

Az ABC háromszög körülírt körében a középponti és kerületi szögek összefüggéséből adódik, hogy $BOC\measuredangle = 80°$, eszerint a BC szakasz az O pontból 80°-os szögben látszik. 1 pont

A BC szakasz a DOB háromszög körülírt körének húrja, hiszen a C pont a fentiek szerint illeszkedik a k_M körre, ezért ez a húr a kerületi szögek tétele miatt a kör H pontjából ugyancsak 80°-os szögben látszik.
Eszerint a CBH háromszög egyenlőszárú háromszög, amelynek HB alapját a CE egyenes merőlegesen felezi. 2 pont

Mivel pedig a DOB háromszög k_M körülírt körében OD és HB húrok, amelyek felezőmerőlegesei rendre a GM és EM egyenesek, ezek M metszéspontja tehát a DOB háromszög körülírt körének középpontja.
Ezzel igazoltuk a feladat állítását, amely szerint a DOB háromszög körülírt körének középpontja éppen az M pont, ez pedig illeszkedik az ABC háromszög C pontból induló magasságvonalára 1 pont

Összesen: 9 pont

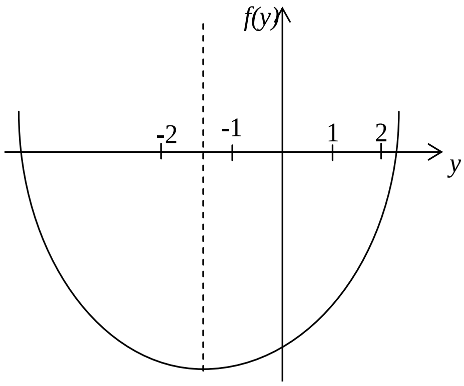
6. feladat

A valós számok halmazán oldjátok meg az $x^4+3x^3+px^2+3x+1=0$ egyenletet $p=3{,}25$ esetén! A p paraméter mely értékei esetén lesz az $x^4+3x^3+px^2+3x+1=0$ egyenletnek négy különböző valós gyöke?

Dr. Katz Sándor, Bonyhád

Megoldás

Az egyenlet reciprok, tehát x^2-tel osztva és $y=x+1/x$-et helyettesítve kapjuk az $y^2+3y+p-2=0$ egyenletet. Ennek $p=3{,}25$ esetén két gyöke van: $y=-2{,}5$ és $y=-0{,}5$. Csak az előbbihez tartozik x (mivel $|x+1/x|\geq 2$), mégpedig $x=-2$ és $x=-0{,}5$, tehát $p=3{,}25$ **esetén** az egyenletnek ez a **két valós megoldása van:** $x=-2$ és $x=-0{,}5$.



Mivel az $y=x+1/x$ egyenletnek csak $|y|>2$ esetén lesz két különböző megoldása, ezért az $y^2+3y+p-2=0$ egyenletnek két kettőnél nagyobb abszolút értékű gyöke kell legyen.

$f(y)=y^2+3y+p-2=(y+1{,}5)^2+p-4{,}25$, ezért a parabola csúcspontjának első koordinátája és ezért két 2-nél nagyobb vagy két -2-nél kisebb gyök nem lehet.

Csak úgy kaphatunk két, az $|y|>2$ feltételnek megfelelő gyököt, ha az egyik gyök -2-nél kisebb, a másik 2-nél nagyobb. Ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy $f(-2)=4-6+p-2<0$ és $f(2)=4+6+p-2<0$. Mindkét feltétel $p<-8$ **esetén** teljesül.

11. évfolyam

1. feladat

A Nemzetközi Magyar Matematikaverseny résztvevői délután is hasznosan töltik az idejüket: sakkversenyt rendeznek. A versenyzők két kategóriába oszthatók: kockákra és nagyágyúkra. A versenyen mindenki mindenki ellen játszott egy mérkőzést. A verseny vége után észrevették, hogy minden versenyző a pontszámai felét éppen a kockák elleni mérkőzésein szerezte. Mutassátok meg, hogy ha m az összes versenyző számát jelöli és nem volt egyetlen döntetlen sem, akkor $\sqrt{m}$ egész szám.

Kekeňák Szilvia, Kassa

Megoldás

Jelöljük a kockák számát k-val, a nagyágyúkét pedig n-nel. Az összes mérkőzés száma nyilván $m(m-1)/2$. Tegyük fel, hogy a győzelemért 1 pont jár, a vesztes 0 pontot kap (így minden mérkőzésen egy pontot osztanak szét). Ha két kocka játszik egymás ellen, mindig kocka nyer. Ezért a kockák összegyűjtött pontszáma a kockák elleni játszmáikban összesen $k(k-1)/2$. A feladatból tudjuk, hogy összesen éppen ennyi pontot gyűjtöttek a kockák a nagyágyúk elleni játszmáikban. Hasonlóan a nagyágyúk összesen $n(n-1)/2$ pontot szereztek a nagyágyúk elleni játszmákban, és ez egyenlő a kockák elleni játszmáikban gyűjtött összpontszámmal. Így nyilván igaz, hogy: $\frac{k(k-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=kn$.

Ekvivalens átalakításokkal: $k^2-k+n^2-n=2kn$, $k^2-2kn+n^2=k+n$, $(k-n)^2=k+n$.

Mivel $k+n=m$, ezért m négyzetszám, tehát $\sqrt{m}$ egész szám.

Másik megoldás.

Jelöljük a kockák számát k-val, a nagyágyúkét pedig n-nel. Természetesen $m=n+k$ és az összes mérkőzés száma nyilván $m(m-1)/2$. Tegyük fel, hogy a győzelemért 1 pont jár, a vesztes 0 pontot kap. Így minden mérkőzésen egy pontot osztanak szét, tehát az összes megszerzett pontok száma $m(m-1)/2$.

Ha két kocka játszik egymás ellen, mindig kocka nyer. Ezért a kockák megszerzett pontszáma a kockák elleni játszmáikban összesen $k(k-1)/2$. A feladatból tudjuk, hogy összesen éppen ennyi pontot gyűjtöttek a kockák a nagyágyúk elleni játszmáikban, tehát a kockák összesen $k(k-1)$ pontot szereztek. Hasonlóan a nagyágyúk összesen $n(n-1)/2$ pontot szereztek a nagyágyúk elleni játszmáikban, és ez egyenlő a kockák elleni játszmáikban gyűjtött összpontszámmal, tehát a nagyágyúk összesen $n(n-1)$ pontot szereztek. Így nyilván igaz, hogy $k(k-1)+n(n-1)=\frac{m(m-1)}{2}$. Mivel $m=n+k$, ezt az előzőbe behelyettesítve hosszabb, de egyszerű

2. feladat

Minden természetes $n\geq 2$ - re bizonyítsátok be a $3^{2n-1}>n^4+10$ egyenlőtlenséget!

Dr. Bencze Mihály, Bukarest és Bálint Béla, Zsolna

Megoldás

Indukcióval. Ha $n=2$, akkor $3^{2\cdot 2-1}=27>26=2^4+10$.

A második lépésben megmutatjuk, hogy ha az egyenlőtlenség érvényes valamilyen n-re, akkor érvényes $(n+1)$-re is, tehát bebizonyítjuk a következő implikációt:

ha $3^{2n-1}>n^4+10$, akkor $3^{2(n+1)-1}>(n+1)^4+10$.

Számoljunk: $3^{2(n+1)-1}=3^{2n+1}=9\cdot 3^{2n-1}>9\cdot(n^4+10)$, s itt felhasználtuk az indukciós feltételt. Most elég megmutatni, hogy $9\cdot(n^4+10)=9n^4+90\geq(n+1)^4+10$.

Viszont $n\geq 2$-re érvényes $\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\leq\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}<9$, innen $9n^4>(n+1)^4$, tehát annál inkább $9n^4+90\geq(n+1)^4+10$.

3. feladat

Legyen $f(x)=x^2+6x+1$ és jelölje M a koordináta-sík azon $(x;y)$ pontjainak a halmazát, amelyekre $f(x)+f(y)\leq 0$ és $f(x)-f(y)\leq 0$. Mekkora az M ponthalmaz területe?

Dr. Kántor Sándorné, Debrecen

Megoldás

$f(x)+f(y)=x^2+6x+1+y^2+6y+1=(x+3)^2+(y+3)^2-16$,

$f(x)-f(y)=x^2+6x-y^2-6y=(x-y)(x+y+6)$.

A feltételek szerint:

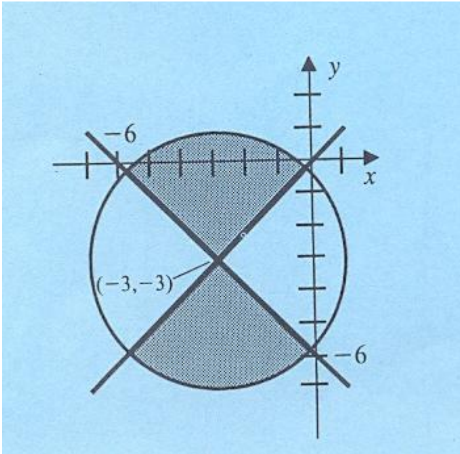
I) $(x+3)^2+(y+3)^2 \le 16$;
II) $(x-y)(x+y+6) \le 0$.

Az I) egyenlőtlenség által meghatározott ponthalmaz egy $(-3;-3)$ középpontú körlap, amelynek sugara 4.

A II) egyenlőtlenség két egyenlőtlenség rendszerbe írható át:

a) $x-y \ge 0$ és $x+y+6 \le 0$;
b) $x-y \le 0$ és $x+y+6 \ge 0$.

Az a) esetben $y \le x$ és $y \le -x-6$;
b) esetben $y \ge x$ és $y \ge -6-x$.
Tehát mindkét esetben egy-egy félsíkot határoznak meg az 1, illetve -1 meredekségű, a $(-3;-3)$ ponton átmenő egyenesek.



Az M ponthalmazt az ábrán sötétítéssel jelöltük, területe a 4 sugarú félkör területével egyenlő, vagyis 8π.

4. feladat. A természetes számok halmazán oldjátok meg a következő egyenletet: $x-y-\frac{x}{y}-\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^4}{y^4}=2017$.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Legyen $\frac{x}{y}=t$, $t \in N$. Ekkor $x=t\cdot y$ és az egyenlet új alakja $t\cdot y-y-t-t^3+t^4=2017$.

Átalakítva: $y(t-1)-t+t^3(t-1)+1=2017+1$, majd $(t-1)(y-1+t^3)=2018=1\cdot 2\cdot 1009$, ahol 1009 prímszám.
A $t-1\in\{1;2;1009\}$ három lehetőségből a $t=1010$ nem állhat fenn, mert a bal oldalon a t^3 túl nagy.

Ha $t-1=1$, akkor $t=2$, $y=2011$ és $x=4022$.

Ha $t-1=2$, akkor $t=3$, $y=983$ és $x=2949$.

Tehát **két megoldás** van: $(4022, 2011)$ és $(2949, 983)$.

5. feladat

Kati papírból háromszögeket vágott ki. Mindegyik háromszögnek volt egy 5 cm és egy 11 cm hosszú oldala, és a harmadik oldal hossza szintén cm-ben mérve egész szám volt. Pisti észrevette, hogy semelyik két háromszög nem volt egybevágó, de ha kivágott volna Kati még egy, a szabályoknak megfelelő háromszöget, akkor az biztosan egybevágó lett volna valamelyik korábban kivágottal. A kivágott háromszögekkel Kati és Pisti játszani kezdett. Felváltva léptek. Egy lépésben egy hegyesszögű, vagy egy tompaszögű, vagy két tompaszögű háromszöget lehetett elvenni. Az nyert, aki utoljára lépett. Melyik játékosnak volt nyerő stratégiája, ha elsőként Kati lépett?

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Megoldás

A harmadik oldal a háromszög-egyenlőtlenség miatt lehet 7, 8, 9, … , 15 cm, vagyis Kati 9 darab háromszöget vágott ki. A Pitagorasz-tétel miatt akkor lesz a háromszög hegyesszögű, ha a harmadik oldala 10, 11 vagy 12 cm, tehát a játék kezdetén a kupacban 3 hegyesszögű és 6 tompaszögű háromszög volt. Ha csak a hegyesszögűekkel játszanának, akkor a kezdőnek lenne nyerő stratégiája, hiszen ő venné el az első és a harmadik darabot. Ha csak a tompaszögűekkel játszanának, akkor a másodikként lépőnek lenne nyerő stratégiája, hiszen ha a kezdő 1-et venne el, akkor ő 2-t, illetve fordítva, így kettejük lépése után mindig 3-mal csökkenne a háromszögek száma. Katinak tehát elsőre egy hegyesszögűt kell elvenni, így marad 2 hegyesszögű és 6 tompaszögű. Ezután már csak arra kell ügyelnie, hogy mindig ugyanabból a kupacból vegyen el, mint amiből Pisti elvett, és miután ő is lépett, a hegyesszögűek száma páros, a tompaszögűek száma pedig 3-mal osztható legyen.

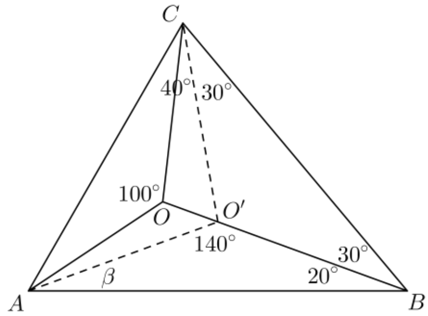
6. feladat

Adott egy olyan ABC háromszög, melyben $BAC\angle = 60°$ és $ABC\angle = 50°$. Legyen O egy olyan pont az ABC háromszög belsejében, melyre $AOC\angle = 100°$ és $CBO\angle = 30°$. Határozzátok meg az $OCB\angle$ mértékét!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás

Gondolatmenetünk szemléltetésére használjuk a mellékelt ábrát.



Tekintsük azt az O' pontot a háromszög belsejében, amelyik úgy helyezkedik el a BO félegyenesen, hogy $BCO'\angle = 30°$. Az AO', BO' és CO' összefutó egyenesekre alkalmazva a *Ceva*-tétel trigonometrikus alakját írhatjuk, hogy: $\dfrac{\sin\beta}{\sin(60°-\beta)} \cdot \dfrac{\sin 40°}{\sin 30°} \cdot \dfrac{\sin 30°}{\sin 20°} = 1$.

Egyszerűsítés és átrendezés után $\sin\beta \cdot \sin 40° = \sin(60°-\beta) \cdot \sin 20°$, $\beta \in (0°, 60°)$ trigonometriai egyenlethez jutunk.

A szinuszok szorzatát koszinuszok különbségévé átalakítva a $\cos(40°-\beta) - \cos(40°+\beta) = \cos(40°-\beta) - \cos(80°-\beta)$ egyenlethez jutunk, ami egyenértékű a következővel: $\cos(40°+\beta) = \cos(80°-\beta)$, $\beta \in (0°, 60°)$.

Mivel a koszinusz függvény a $(0°, 180°)$ intervallumon csökkenő, ezért az előbbi egyenlet egyetlen megoldását a $40°+\beta = 80°-\beta$ első fokú egyenlet szolgáltatja, amiből $\beta = 20°$.

Emiatt az $AO'C\angle = 100°$. Tehát az AC szakasz a háromszög belsejében lévő O és O' pontokból is $100°$-os szög alatt látszik. Innen adódik (a látókörívek tétele alapján), hogy az O és O' pontok egyrészt egy A és C végpontú körív pontjai a háromszög belsejében, másrészt egy, a B-ből kiinduló félegyenes pontjai is, ezért egybe kell esniük, amiből már az következik, hogy $OCB\angle = O'CB\angle = 30°$.

12. évfolyam

1. feladat

A valós számok halmazán oldjátok meg a következő egyenletrendszert:

$$x \cdot y = 1, \quad x + y - \cos^2 z = -2.$$

Dr. Minda Mihály, Vác

Megoldás. Az elsőfokú egyenletből kifejezzük *x*-et, s az első egyenletbe helyettesítjük: $y \cdot (-y + \cos^2 z - 2) = 1$.

Ezt rendezve másodfokú egyenletet kapunk: $y^2 + (2 - \cos^2 z) \cdot y + 1 = 0$.

Ennek csak akkor van valós gyöke, ha a diszkrimináns nem negatív, azaz $(2-\cos^2 z)^2 - 4 \ge 0$, vagyis

$$(2-\cos^2 z)^2 \ge 4.$$

Mivel $0 \le \cos^2 z \le 1$, ez csak akkor állhat fenn, ha $\cos^2 z = 0$.

Ebből $\cos z = 0$, tehát $z = (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$.

Az eredeti egyenletrendszerbe $\cos z = 0$-t visszaírva kapjuk: $x \cdot y = 1,\ x + y = -2$.

Ennek az egyenletrendszernek $x = -1$ és $y = -1$ a megoldása.

Az $x = -1,\ y = -1$ és $z = (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$ értékek kielégítik az eredeti egyenletrendszert.

2. feladat

Néhány papírlapra felírtuk a 2017-nél nem nagyobb pozitív egész számokat. Mindegyik számot pontosan egy lapra írtunk fel. Az egy lapra írt számok között nem volt két olyan szám, amelyek közül a kisebbik osztója a nagyobbnak. Mennyi volt a papírlapok számának legkisebb lehetséges értéke? Maximum hány darab szám szerepelhetett egy papírlapon?

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Megoldás. A 2 hatványait különböző lapra kellett írnunk.

Mivel 2017-ig a legnagyobb 2-hatvány $1024=2^{10}$, így 1-től 2017-ig 11 darab 2-hatvány van, vagyis legalább 11 lapra szükség volt.

Viszont 11 lapra adható konstrukció: az első lapra írjuk az 1-t, a másodikra a 2-t ás 3-t, majd a folytatásban mindig a 2-hatványtól kezdjünk új lapot, vagyis a *k*-ik lapon 2^{k-1}-től $2^k - 1$-ig legyenek a számok (kivéve az utolsó lapot, ahol 2017 a legnagyobb).

Biztos, hogy egy lapon egyik szám sem lehet a másik többszöröse, hiszen a lapra írt legkisebb szám kétszerese sincs már ezen a lapon.

1-től 2017-ig 1009 páratlan szám van. Skatulyaelv alapján, ha 1009-nél több szám kerül egy lapra, akkor van köztük két olyan, amelyeknek ugyanaz a legnagyobb páratlan osztója.

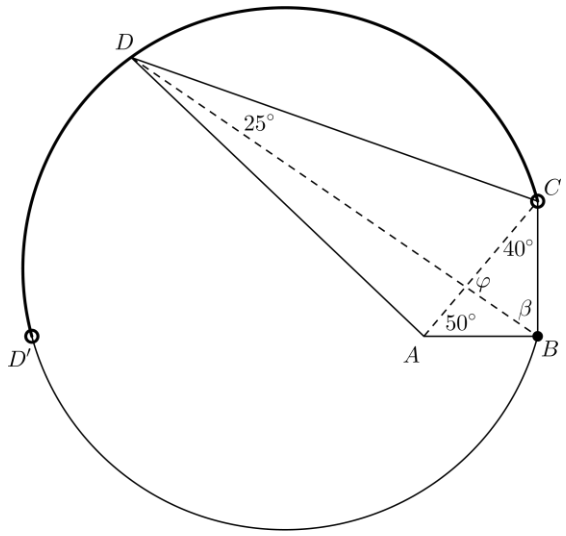
Ha két számnak ugyanaz a legnagyobb páratlan osztója, akkor a felbontásuk prím tényezőkre csak a 2 kitevőjében tér el, így a kisebb osztója a nagyobbnak. Vagyis az egy lapra írt számok darabszáma nem lehet 1009-nél több.

Ennyi viszont lehet, pld. ha 1009-től 2017-ig írjuk a számokat egy lapra. Itt egyik szám sem osztója a másiknak, hiszen $2 \cdot 1009 = 2018 > 2017$.

3. feladat

Az $ABCD$ konvex négyszögben a következő szögek ismertek:
$BCA\angle = 40°$, $BAC\angle = 50°$, és $BDC\angle = 25°$. Határozzátok meg a négyszög átlói által bezárt szöget.

Dr. Ripcó Sipos Elvira, Zenta



Megoldás:

$ABC\angle = 180° - 50° - 40° = 90°$

D rajta van a *BC* körül megfelelő $25°$-os látószögkörív *D'C* ívén, ahol *D'* a *BA* félegyenes és a körív metszéspontja. Így végtelen sok megoldás lehetséges:

Mivel 0°<β<90° (lásd az ábrát), ezért az átlók által bezárt φ szög a (40°;90°] intervallum bármelyik eleme lehet.

4. feladat

Bizonyítsátok be, hogy $\dfrac{1}{\cos 50°} + \dfrac{1}{\cos 70°} = 2 \cdot \sqrt{3} + \dfrac{1}{\cos 10°}$.

Dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás. Ismert goniometriai és algebrai identitásokat használva kapjuk:

$\cos 50° = \cos(60° - 10°) = \cos 60° \cdot \cos 10° + \sin 60° \cdot \sin 10° = \frac{1}{2}\cos 10° + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 10°$,

$\cos 70° = \cos(60° + 10°) = \cos 60° \cdot \cos 10° - \sin 60° \cdot \sin 10° = \frac{1}{2}\cos 10° + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 10°$,

$$\frac{1}{\cos 50°} + \frac{1}{\cos 70°} = \frac{\cos 70° + \cos 50°}{\cos 50° \cdot \cos 70°} = \frac{\cos 10°}{\cos 50° \cdot \cos 70°} =$$

$$= \frac{4\cos 10°}{(\cos 10° + \sqrt{3}\sin 10°)(\cos 10° - \sqrt{3}\sin 10°)} = \frac{4\cos 10°}{\cos^2 10° - 3\sin^2 10°} = \frac{4\cos 10°}{4\cos^2 10° - 3} =$$

$$= \frac{4\cos^2 10°}{\cos 10°(4\cos^2 10° - 3)} = \frac{4\cos^2 10° - 3 + 3}{\cos 10°(4\cos^2 10° - 3)} = \frac{1}{\cos 10°} + \frac{3}{\cos 10°(4\cos^2 10° - 3)} =$$

$$= \frac{1}{\cos 10°} + \frac{3}{\cos 30°} = 2 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{\cos 10°}.$$

(Az utolsó előtti egyenlőség indoklása: $\cos 3x = \cos x \cdot (4\cos^2 x - 3)$ könnyen levezethető)

5. feladat

Az f függvény minden valós x, y számpárra eleget tesz az $f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1$ függvényegyenletnek és $f(1) = 1$. Határozzátok meg az f függvény következő értékeit: $f(17)$, $f(1/2)$ és $f(1/3)$.

Oláh György, Révkomárom és Bálint Béla, Zsolna

Megoldás. Tudjuk, hogy $f(1) = 1$, ezért $f(1) + f(n-1) = f(n) - (n-1) - 1$, tehát $f(n) = f(n-1) + n + 1$.
Innen $f(2) = 4$, $f(3) = 8$, $f(4) = 13$, $f(5) = 19$, $f(6) = 26$, … és itt a különbségek $4, 5, 6, 7, \ldots$ sorozatot alkotnak. Ebből könnyen rájövünk, hogy $f(n) = -1 + \frac{n(n+3)}{2}$ minden természetes n-re és ezt indukcióval egyszerűen be is bizonyítjuk. Tehát $f(17) = 169$.
Az adott feltételből $f(1/2) + f(1/2) = f(1) - 1/4 - 1 = -1/4$, tehát $f(1/2) = -1/8$.
Továbbá
$2 \cdot f(1/3) = f(1/3) + f(1/3) = f(2/3) - 1/9 - 1 = f(2/3) - 10/9$, $f(1/3) + f(2/3) = f(1) - 2/9 - 1 = -2/9$, és ebből a két egyenletből már könnyen megkapjuk a keresett értéket: $f(1/3) = -4/9$.

Másik megoldás. Az adott függvényegyenletből $f(1) + f(1) = f(2) - 1 - 1$, tehát $f(2) = 4$. Hasonlóan $f(2) + f(2) = f(4) - 4 - 1$, tehát $f(4) = 13$. Ismételve az eljárást kapjuk, hogy $f(8) = 43$, $f(16) = 151$, és végül $f(1) + f(16) = f(17) - 16 - 1$, ahonnan $f(17) = 169$.
Az $f(1/2) = -1/8$ és $f(1/3) = -4/9$ értékeket ugyanúgy kaphatjuk meg, mint feljebb.

6. feladat

A táblára fel van írva egymás után n darab valós szám. Ezek a számok a következő tulajdonsággal rendelkeznek: „Ha tetszőleges mennyiségű számot letörlünk úgy, hogy a táblán maradt számok csökkenő sorozatot alkotnak, akkor ez a sorozat legfeljebb k hosszúságú.” Bizonyítsátok be, hogy a táblán lévő összes szám befesthető legfeljebb k színnel úgy, hogy az egyforma színű számok növekvő sorozatot alkossanak.

Kekeňák Tamás, Kassa

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy milyen stratégiával fogjuk kiszínezni a számokat. Kezdjük a színezést balról. Az első számot színezzük ki az első színnel. Ezután jobbra haladva beszínezzük ezzel a színnel az összes olyan számot, amely nagyobb az előző beszínezett számtól. Így haladunk addig, amíg már nincs jobbra nagyobb szám, amit beszínezhetnénk az első színnel.

Ezután újra visszatérünk a sorozat elejére, és az első számot, ami még nincs kiszínezve, kiszínezzük a második színnel. Ezután ezzel a második színnel is az előző stratégia szerint színezünk.

Ezt alkalmazzuk mindaddig, amíg nem fogyunk ki a színekből. Két lehetőség van: vagy sikerült kiszíneznünk (maximum) k színnel a számokat, vagy ennél a színezésnél maradt legalább egy szám a táblán, aminek nem jutott szín. Most megmutatjuk, hogy az utóbbi eset ennél a stratégiánál nem lehetséges.

Tegyük fel, hogy van a táblán olyan A_x szám, amit nem színeztünk ki (az első ilyen számot vesszük balról). Az, hogy ezt a számot a k szín közül egyikkel sem tudtuk kiszínezni, azt jelenti, hogy még mielőtt eljutottunk volna ehhez a számhoz, volt olyan szám, amely nagyobb tőle, és azt kiszíneztük a k szín egyikével. Ez azt jelenti, hogy az A_x számtól balra minden színből van legalább egy olyan szám, ami nagyobb tőle. Most megmutatjuk, hogy ezekből a számokból tudunk egy olyan csökkenő sorozatot képezni, amely k számot tartalmaz, és ezekből mindegyik más színű.

Vegyük az első számot az A_x-től balra, amelyik nagyobb tőle, és a k.-ik színnel van kifestve. Legyen ez a szám A_k. Ilyen szám biztos van. Most menjünk az A_k számtól balra és legyen A_{k-1} az a szám, ami tőle nagyobb és a $(k-1)$.-ik színnel van kifestve. Ilyen szám is biztos van, mivel ha az A_k-tól balra már csak kisebb $(k-1)$.-ik színnel kifestett számok lennének, akkor A_k-t sem kellett volna új színnel kifesteni. Hasonlóan tudunk találni egy A_{k-2} számot, amely az A_{k-1}-től balra van és a $(k-2)$.-ik színnel van kifestve (mert ha nem lenne ilyen, akkor az A_{k-1} sem lehetne $(k-1)$.-ik színű, hisz például a $(k-2)$.-ik színnel is kifesthettük volna). Így haladunk tovább, amíg eljutunk az A_1 számhoz. Megmutattuk tehát, hogy találunk a táblán egy $A_1, \ldots, A_k$ csökkenő sorozatot; viszont mi tudjuk, hogy A_x kisebb mint A_k, ezért ennek a sorozatnak A_x is tagja. Ez azonban ellentmond annak, hogy a leghosszabb csökkenő sorozat legfeljebb k hosszúságú, hisz ez $k+1$.

Ellentmondáshoz jutottunk, ezért ezzel a stratégiával biztos ki tudunk színezni minden számot legfeljebb k színnel.