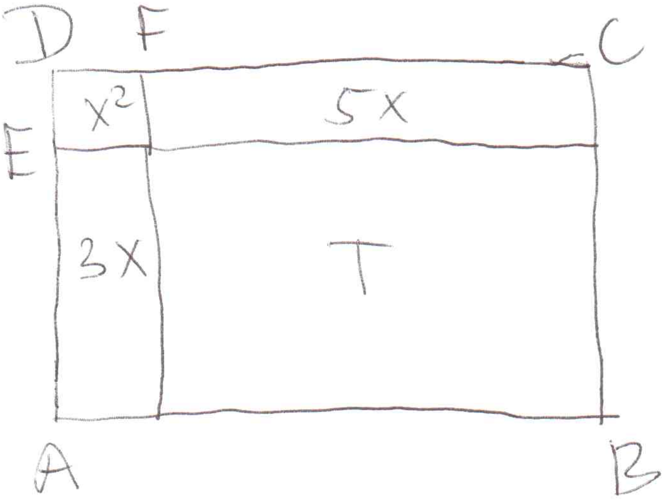
Hajnal Imre Matematika Tesztverseny 2017.

Megoldások

I. és II. kategória közös feladatai

1. $(1-2)+(3-4)+\ldots+(2015-2016)+2017=$
$=1008\cdot(-1)+2017=\underline{1009}$ $\boxed{C}$

2. A számok összege $3\cdot 16=48$. Ha két szám értéke maximális (20), akkor a harmadik minimális, nevezetesen $\underline{8}$. $\boxed{A}$

3. 

$DF=DE=x$
$\Downarrow$
$AE=3$ és $FC=5$
Így $T=3\cdot 5=\underline{15}$ $\boxed{A}$

4. $2a^{6b}=2\cdot\left(a^{2b}\right)^3=250$
Így $2\cdot a^{6b}-4=\underline{246}$ $\boxed{B}$

5. $\overline{6a3}+\overline{2b5}=800+10(a+b)+8=$
$=801+9(a+b)+(a+b+7)=9(89+a+b)+(a+b+7)$
$9\mid(a+b+7) \Rightarrow a+b=2 \vee \underline{a+b=11}$ $\boxed{E}$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{11}{15}\,h$$

$\boxed{C}$

$$\bar{v} = \frac{40\,km}{\frac{11}{15}\,h} = \frac{600}{11}\,\frac{km}{h} = \underline{\underline{54\frac{6}{11}\,\frac{km}{h}}}$$

7. 1. $x < -1$

$$|x+1| + 2\cdot|x-2| = -x-1-2x+4 = -3x+3 < 6$$

$$x > -1 \quad \text{itt nincs megoldás}$$

2. $-1 \leq x < 2$

$$|x+1| + 2\cdot|x-2| = x+1-2x+4 = -x+5 < 6$$

$$-1 < x (< 2)$$

3. $2 \leq x$

$$|x+1| + 2\cdot|x-2| = 3x-3 < 6$$

$$(2 \leq) x < 3$$

$\boxed{C}$

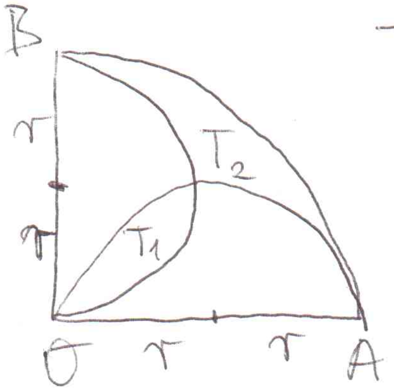
Összefoglalva: $\underline{\underline{-1 < x < 3}}$

8. $(4-1)\cdot A = 3\cdot A = (4-1)(1+4)(1+4^2)\cdot(1+4^4)\cdot$
$\cdot(1+4^8)(1+4^{16})(1+4^{32}) = (4^2-1)(4^2+1)\cdot$
$\cdot(4^4+1)(4^8+1)(4^{16}+1)(4^{32}+1) = 4^{64}-1$

$$A = \frac{4^{64}-1}{3} = \underline{\underline{\frac{2^{128}-1}{3}}}$$

$\boxed{C}$

9.



$$T_2 = \frac{4r^2\pi}{4} - \frac{r^2\pi}{2} - \frac{r^2\pi}{2} + T_1 = T_1$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 1$$

$\boxed{D}$

10. Legfeljebb kétjegyűek:

6; 15; 24; 33; 42; 51; 60 $\boxed{7 \text{ db}}$

100 − 200: 105, 114, 123, 132, 141, 150 $\boxed{6 \text{ db}}$

200 − 300: 204; 213; 222; 231; 240 $\boxed{5 \text{ db}}$

300 − 400: 303; 312; 321; 330 $\boxed{4 \text{ db}}$

400 − 500: 402; 411; 420 $\boxed{3 \text{ db}}$

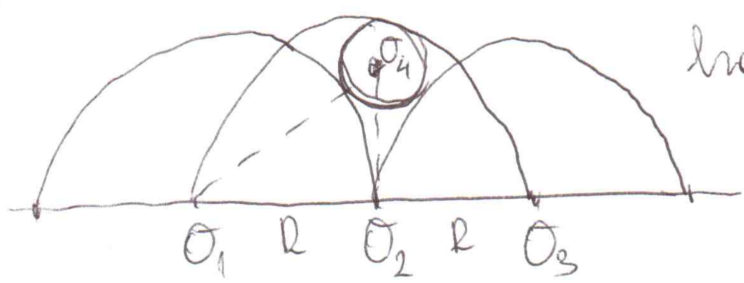
500 − 600: 501; 510 $\boxed{2 \text{ db}}$

600 $\boxed{1 \text{ db}}$

Összesen 28 db.

$\boxed{A}$

11.



Az $O_1O_2O_4$ derékszögű háromszögre:

$$(R+r)^2 = R^2 + (R-r)^2$$

$$2Rr = R^2 - 2Rr$$

$$4r = R$$

$$\frac{R}{r} = 4$$

$\boxed{A}$

12. A sokszög köré írható kör (rövidebbik) íve mentén mérve a távolságot kapjuk, hogy 10 különböző távolság lehetséges. Mivel $10=\binom{5}{2}$, ezért a piros pontok száma legfeljebb 5. Ez megvalósítható, amint az ábrán látható.
$(0;3;4;9;11)$

D

13. Összesen $\binom{9}{4}$ pontnégyes választható ki. 3 pont egy egyenesre 8-féleképpen illeszkedhet, ezért a „rossz" pontnégyesek száma $8\cdot 6=48$.

D

A megfelelő pontnégyesek száma:
$$\binom{9}{4}-48=126-48=\underline{\underline{78}}$$

14. $$n^2+7=\underbrace{n^2+3n}_{(n+3)|}-\underbrace{(3n+9)}_{(n+3)|}+16$$

D

$n\in\mathbb{N}^+$ megfelelő, ha $(n+3)|16$, azaz $n=13;5;1$.
Tehát $\underline{3}$ megfelelő n van.

(15.) Ha x lépés hosszú a fa, akkor

$$(1)\quad \frac{x-15}{v_j} = \frac{15}{v_b}$$

$$(2)\quad \frac{75-x}{v_j} = \frac{75}{v_b}$$

$$\frac{(2)}{(1)}: \quad \frac{75-x}{x-15} = 5 \quad\Downarrow\quad \underline{\underline{x=25}}$$

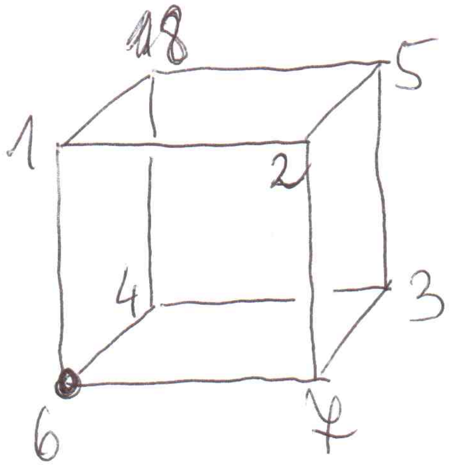
$\boxed{A}$

Megjegyzés: $25 = \dfrac{2}{\frac{1}{75} + \frac{1}{15}}$

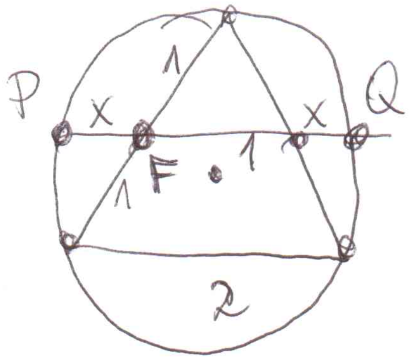
(16.) A 6-os csúcsból az 1; 4; 7 pontokba fut él, ugyanis ezek a számok két lapon szerepelnek együtt 6-tal. Ezek alapján reprodukálható a kocka számozása.

6-tal átlósan az <u>5 van.</u>

$\boxed{D}$



17.



F-re a szelőszakasz tétele:

$$x(1+x)=1$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x-1=0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\underline{\underline{PQ=2x+1=\sqrt{5}}}$$

$\boxed{D}$

18.

$$P=\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{2}+n(N-n)}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}+nN-n^2}=$$

$$=\frac{n-1}{n-1+2N-2n}=\underline{\underline{\frac{n-1}{2N-n-1}}}$$

$\boxed{A}$

19.

$$\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0 \qquad |x|<2$$

$$x^3=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3$$

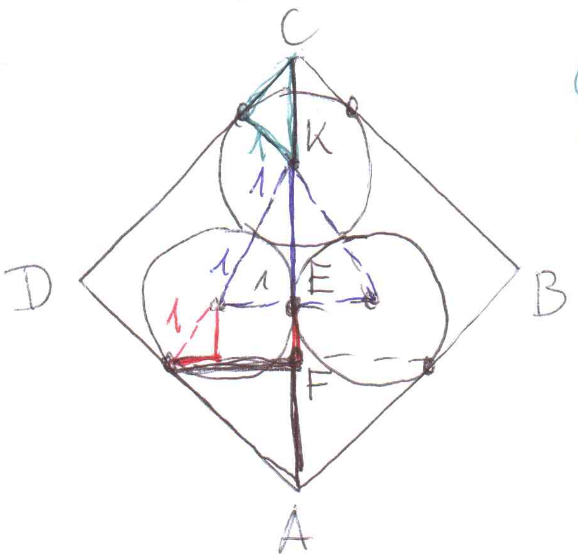
$$2x^2=4$$

$$x^2=2 \iff |x|=\sqrt{2}$$

$\boxed{B}$

Ha $x=-\sqrt{2}$, akkor az eredeti egyenlet bal oldala negatív, ezért <u>egy gyök</u> van, az $x=\sqrt{2}$.

20. A legsűrűbb elrendezés az ábrán látható. Előbb az AC átló hosszát határozzuk meg majd ebből a négyzet oldalát.



$CK = \sqrt{2}$

$KE = \sqrt{3}$

$EF = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$FA = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{A}$

$$AC = 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$AB = \frac{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+4+\sqrt{6}}{2} = \underline{\underline{\frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}}$$

— o —

I. kategória

21. Mivel $1+2+\ldots+12=78$, ezért a sorösszeg 39, az oszlopösszeg pedig 13. Így az azonos oszlopokban levő számpárok:

$(1;12)$, $(2;11)$, $(3;10)$, $(4;9)$, $(5;8)$, $(6;7)$.

A párokban az abszolút különbségek rendre:

11; 9; 7; 5; 3; 1.

A sorok kitöltéséhez az előjeleket kell jól megválasztani az alábbi összegben:

$$\pm 11 \pm 9 \pm 7 \pm 5 \pm 3 \pm 1 = 0.$$

$\boxed{E}$

$-11+9-7+5+3+1=0$, így

1	11	3	9	8	7
12	2	10	4	5	6

→ 5 db páros szám

22. Dani Katát a tó $\frac{1}{3}$ ill. $\frac{2}{3}$ részénél előzte meg, amiből következik, hogy 4-szer olyan gyorsan fut, mint Kata. Ellenkező irányban futva Dani a tó $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ és $\frac{4}{5}$ részénél találkozik Katával. $\rightarrow$ <u>4 alkalommal találkoznak</u>

$\boxed{D}$

23. $f(-7) = a(-7)^7 + b(-7)^3 + c\cdot(-7) - 4 =$

$= -a\cdot 7^7 - b\cdot 7^3 - c7 - 4 = 3$

$\boxed{A}$

Így $a\cdot 7^7 + b\cdot 7^3 + c\cdot 7 + 4 = -3$

$f(7) = a\cdot 7^7 + b\cdot 7^3 + c\cdot 7 - 4 = -3 - 8 = \underline{\underline{-11}}$

24. $10a + b = k(a+b) \Leftrightarrow (10-k)a = (k-1)b$ (*)

1. Ha $b = 0$, $k = 10$
2. Ha $b \neq 0$, akkor (*) miatt a k feltételnek megfelelő értékei: 4; 7.

Tehát k lehet 4; 7; 10. Ezek mindegyikével a felsoroltak közül csak a <u>280</u> osztható.

$\boxed{C}$

25. n-t nem relatív prímek:

$p; 2p; \ldots; qp; q; 2q; \ldots; pq$ ($pq = n$ kétszer)

Ezek száma $p+q-1$. Így a relatív prímek száma $(n-1)-(p+q-1) = n-(p+q) = \underline{\underline{pq-(p+q)}}$

$\boxed{B}$

II. kategória

21.

$$1 \le n \le 7 \Rightarrow \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = 1$$

$$8 \le n \le 26 \Rightarrow \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = 2$$

$$27 \le n \le 63 \Rightarrow \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = 3$$

Mivel a lehetséges válaszok mindegyike kisebb 64-nél, ezért nem kell tovább vizsgálódnunk.

Legyen $f(n) = \lfloor \sqrt[3]{1} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$.

$\boxed{B}$

$$f(n) = \begin{cases} n, & 1 \le n \le 7 \\ f(7) + 2(n-7) = 2n-7, & 8 \le n \le 26 \\ f(26) + 3(n-26) = 3n-33, & 27 \le n \le 63 \end{cases}$$

$$f(n) = 2n = 3n - 33 \Leftrightarrow \underline{\underline{n = 33}}$$

22. A feltételek alapján $a = 9$.

A másik metszéspontot behelyettesítve kapjuk, hogy $b = 2$.

Az egyenes két pontja: $(0;9)$ és $(2;1)$, így a meredeksége: $\frac{1-9}{2-0} = \underline{\underline{-4}}$

$\boxed{D}$

23. $AC = \sqrt{52}$. A szinusztétel alapján ($\beta = CAB\sphericalangle = ACD\sphericalangle$)

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{52}}{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))} = \frac{\sqrt{52}}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$AB = \frac{\sqrt{52}\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \frac{\sqrt{52}\sin\alpha}{\frac{6}{\sqrt{52}}\sin\alpha + \frac{4}{\sqrt{52}}\cos\alpha} =$$

$\boxed{A}$

$$= \underline{\underline{\frac{26\sin\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}}}$$

24. (3) és (1) miatt

$$f(1;y)=f(0;f(1;y-1))=f(1;y-1)+1,$$

így (2)-t is felhasználva

$$f(1;1)=f(1;0)+1=f(0;1)+1=3.$$

Ezt folytatva kapjuk, hogy $f(1;y)=y+2$.

$$\boxed{E}$$

$$f(2;2)=f(1;f(2;1))=f(2;1)+2=$$
$$=f(1;f(2;0))+2=f(2;0)+2+2=$$
$$=f(1;1)+4=\underline{\underline{7}}$$

25. $2x+7y=2017$

$x_0=1005 \quad \rightarrow \quad x=1005-7t$

$y_0=1 \quad \rightarrow \quad y=1+2t$

$x>0 \iff \frac{1005}{7}>t$. Mivel $t\in\mathbb{Z}$, ezért $\underline{t\leq 143}$

$y>0 \iff t>-\frac{1}{2}$ — " — $\underline{t\geq 0}$

Összefoglalva: $\underline{0\leq t\leq 143} \quad t\in\mathbb{N}$

<u>144 darab</u> megfelelő számpár van.

$$\boxed{B}$$