XXI. HAJNAL IMRE MATEMATIKA TESZTVERSENY

Feladatsor

I. kategória

BOLYAI TÁRSULAT

Békés Megyei Tagozata

GYSZC Harruckern János Szakképző Iskolája és Kollégiuma

MTA SZAB Békés Megyei Testületének Matematika Tudományos Műhelye

2017. április 8.

Gyula

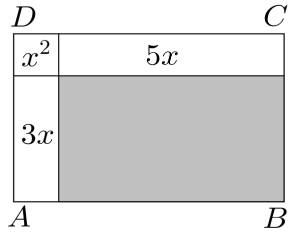
1. Az első 2017 darab pozitív egész szám mindegyikének egyszeri felhasználásával az $1-2+3-4+5-...+2015-2016+2017$ váltakozó előjelű összeget képeztük. Az összeg értéke

(A) -1008 (B) 1008 (C) 1009 (D) -504 (E) 2017

2. Az a, b, c nem negatív egész számok egyike sem nagyobb 20-nál, átlaguk 16. A legkisebb szám lehetséges értékeinek minimuma

(A) 8 (B) 9 (C) 6 (D) 11 (E) 10

3. Az $ABCD$ téglalapot az ábrán látható módon felosztottuk egy négyzetre és három téglalapra. Három részbe beírtuk az alakzat területét cm^2-ben mérve. A szürke téglalap területe cm^2-ben



(A) 15 (B) $15x^2$ (C) $8x^2$ (D) $15x$ (E) $8x$

4. Ha $a^{2b}=5$, akkor $2a^{6b}-4=$

(A) 26 (B) 246 (C) 242 (D) $12\sqrt{5}-4$ (E) 8

5. Ha a tízes számrendszerben felírt $\overline{6a3}$ és $\overline{2b5}$ háromjegyű pozitív egész számok összege osztható 9-cel, akkor $a+b$ maximuma

(A) 12 (B) 9 (C) 2 (D) 20 (E) ezek egyike sem

6. Egy személygépkocsi a 40 km-es út első felét 50 km/h átlagsebességgel, másik felét 60 km/h átlagsebességgel tette meg. Mekkora a teljes útra számított átlagsebessége km/h-ban?

(A) 55 (B) 54 (C) $54\frac{6}{11}$ (D) $55\frac{5}{11}$ (E) $55\frac{6}{11}$

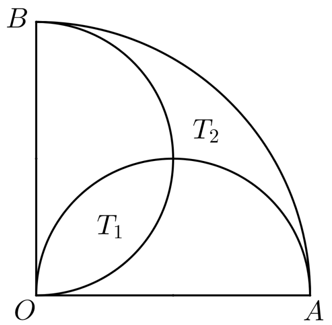
7. Melyik állítással ekvivalens az „$|x+1|+2\cdot|x-2|<6$” állítás?

(A) „$-1<x<2$” (B) „$0<x<1$” (C) „$-1<x<3$” (D) „$x<2$” (E) „$x<-1$ vagy $2<x$”

8. Ha $A=(1+4)\cdot(1+4^2)\cdot(1+4^4)\cdot(1+4^8)\cdot(1+4^{16})\cdot(1+4^{32})$, akkor $A=$

(A) $\frac{2^{128}+2^{64}-5}{3}$ (B) $\frac{2^{127}+2^{63}+5}{3}$ (C) $\frac{2^{128}-1}{3}$ (D) $\frac{2^{126}-1}{3}$ (E) ezek egyike sem

9. Az OAB negyed körlapot az OA és OB mint átmérők fölé rajzolt félkörök négy részre osztják az ábrának megfelelően. Ha T_1 és T_2 a megfelelő tartományok területe, akkor $\frac{T_1}{T_2}=$

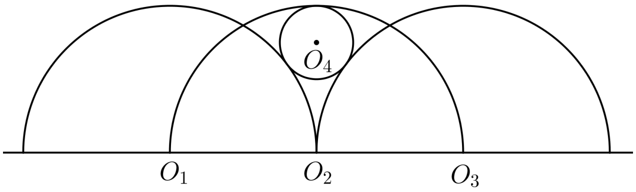


(A) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) 1 (E) $\frac{\pi}{3}$

10. Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege 6?
(A) 28 (B) 19 (C) 111 (D) 18 (E) 27

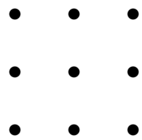
11. Az ábrán látható O_1, O_2 és O_3 középpontú félkörök sugara R, az O_4 középpontú, mindhárom félkört érintő kör sugara pedig r. Ekkor $\frac{R}{r} =$

(A) 4 (B) $\frac{15}{4}$ (C) $\frac{11}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$ (E) 3



12. Egy körvonalon megjelöljük a körbe írható 21 oldalú szabályos sokszög csúcsait. Közülük n darabot pirosra festünk úgy, hogy a piros pontokat összekötő szakaszok páronként különböző hosszúságúak. n lehetséges értékeinek maximuma
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

13. Az ábrán látható kilenc pont közül hányféleképpen lehet négy pontot kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott pontok közül semelyik három ne illeszkedjen egy egyenesre?



(A) 126 (B) 48 (C) 63 (D) 78 (E) 90

14. Hány olyan pozitív egész n szám van, amelyre $(n+3)$ osztója (n^2+7)-nek?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) végtelen sok

15. Józsi bácsi egy fatörzset vontat a lovával. Béla bácsi kíváncsi a fatörzs hosszára. Ha szemben halad a lóval, 15 lépésnek méri a törzset, ha a lóval egy irányban, akkor 75 lépésnek. Béla bácsi és a ló is egyenletesen halad. Hány lépés hosszú a fatörzs?
(A) 25 (B) 30 (C) 35 (D) 45 (E) 60

16. Egy kocka csúcsait az első nyolc pozitív egész számmal jelöltük meg úgy, hogy az egyes lapokon található csúcsok halmazai: $\{1;2;6;7\}$, $\{1;4;6;8\}$, $\{1;2;5;8\}$, $\{2;3;5;7\}$, $\{3;4;6;7\}$, $\{3;4;5;8\}$. Melyik szám jelöli annak a testátlónak a másik végpontját, amelynek egyik végpontja a 6-tal jelölt pont?
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

17. Egy körbe 2 egység oldalhosszúságú szabályos háromszög írható. Milyen hosszú a körnek az a húrja, amelyik illeszkedik a háromszög két oldalfelező pontjára?

(A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\sqrt{5}-1$ (C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) $2\sqrt{5}$

18. Egy jótékony célú teniszmérkőzés két játékosát N élvonalbeli teniszező közül véletlenszerűen választják ki (egy átlátszatlan dobozból egymás után húzzák ki a két nevet). Az N teniszező között n magyar játékos van. Ha elsőre egy magyar teniszező nevét húzzák ki, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a mérkőzést két magyar sportoló játssza?

(A) $\frac{n-1}{2N-n-1}$ (B) $\frac{n-1}{N-1}$ (C) $\frac{n+1}{2N-n+1}$ (D) $\frac{3n-1}{2N+n-1}$ (E) $\frac{2n-1}{2N-1}$

19. Hány valós megoldása van az $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0$ egyenletnek?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

20. Mekkora az oldala annak a legkisebb négyzetnek, amely három darab egységnyi sugarú körlapot egyidejűleg lefed, ha a körlapok nem fedhetik, csak érinthetik egymást?

(A) $\frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ (B) 4 (C) $2+\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (E) $3+\sqrt{2}$

21. Az első tizenkét darab pozitív egész számot beírtuk egy két sorból és hat oszlopból álló táblázat mezőibe úgy, hogy
(1) minden számot pontosan egyszer használtunk fel, és minden mezőbe egy szám került;
(2) az egyes sorokban levő számok összege egyenlő;
(3) az egyes oszlopokban levő számok összege páronként egyenlő.
Ha a 8 az első sorban van, akkor a második sorban levő páros számok száma

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

22. Kata és Dani egy kiránduláson elhatározták, hogy reggeli testedzésként futnak a szállásukhoz közeli tó körül. Kata csak kocogott, Dani aktív sportoló lévén intenzíven futott. Egyik reggel egyszerre indultak ugyanarról a helyről ugyanabba az irányba, és végig állandó sebességgel futottak. Kata egyszer kerülte meg a tavat, Dani kétszer előzte meg Katát, és egyszerre fejezték be a futást ugyanazon a helyen, ahonnan indultak. A következő reggelen Dani ellenkező irányban futott, de egyszerre indultak, egyszerre érkeztek, és Kata most is egy teljes kört tett meg. Ha mindketten az előző napi sebességükkel futottak, akkor hányszor találkoztak – az indulást és az érkezést nem számolva – futás közben?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

23. Ha $f(x)=ax^7+bx^3+cx-4$ és $f(-7)=3$, akkor $f(7)=$

(A) -11 (B) -3 (C) 10 (D) 17 (E) nem határozható meg egyértelműen

24. Egy 9-cel nem osztható, kétjegyű pozitív egész szám a tízes számrendszerben egyenlő számjegyei összegének k-szorosával (k pozitív egész). Ha k biztosan osztója K-nak, akkor $K=$

(A) 210 (B) 240 (C) 280 (D) 320 (E) 350

25. p és q különböző prímek és $n=pq$. A $\{2;3;...;n\}$ halmaznak hány olyan eleme van, amelyek n-hez relatív prímek?

(A) $n-pq$ (B) $pq-(p+q)$ (C) $pq-(p+q+1)$ (D) $pq-3$ (E) $pq-4$