XLI. Felvidéki Magyar Matematika Verseny
Oláh György Emlékverseny
Szenc 2017

1. évfolyam – Megoldások

1. feladat: Egy dobozban 12 000 azonos méretű kis kocka van. Legalább hány ilyen dobozra van szükségünk, ha a bennük lévő kis kockákból egyetlen nagy kockát szeretnénk kirakni úgy, hogy egyetlen kis kocka se maradjon ki?

(Fonód Tibor)

Megoldás: *Prímtényezők szorzatára bontva:* $12000 = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^3$. *Nyilván ahhoz, hogy ennek többszöröse a lehető legkisebb köbszám legyen,* $2^1 \cdot 3^2 = 18$*-cal kell szorozni, tehát 18 darab dobozra van szükség.*

2. feladat: Legfeljebb hány huszárt tudunk elhelyezni egy hagyományos 8×8-as sakktáblán úgy, hogy semmelyik kettő ne üsse egymást?

(Kekeňák Szilvia)

Megoldás: *Megmutatjuk, hogy el tudunk helyezni 32 huszárt. Ehhez elég észrevennünk, hogy a huszár tetszőleges lépése során az ellenkező színű mezőre ugrik. Ha minden huszárt pl. a fekete mezőkön helyezünk el, akkor biztosan semmelyik kettő sem üti egymást. Még azt kell megmutatnunk, hogy több huszárt nem tudunk elhelyezni. Ehhez elég párba állítani az egyes mezőket úgy, hogy ha az egyiken áll egy huszár, akkor a vele párban levőre már nem állhat egy másik. Ezt a következő képpen tudjuk megcsinálni:*

1	*2*	*3*	*4*
3	*4*	*1*	*2*

Ezt alkalmazzuk 8-szor a sakktáblára. Innen már nyilvánvaló, hogy 32 a feladat megoldása.

3. feladat: Határozzuk meg az összes olyan egész együtthatós $P(x) = ax + b$ polinomot, amelyre egyidejűleg teljesül:

$$P(1) < P(2) \qquad \text{és} \qquad (P(1))^2 + (P(2))^2 = 5.$$

(Mészáros József)

Megoldás: *Nyilván* $P(1)$, $P(2)$ *egész számok és* $5 = (\pm1)^2 + (\pm2)^2$ *az egyetlen lehetőség az 5 felírására két négyzetszám összegeként. Figyelembe véve, hogy* $P(1) < P(2)$, *csak a következő lehetőségeket kapjuk a* $(P(1), P(2))$ *rendezett számpár értékeire:* $(-2,-1)$, $(-2,1)$, $(-1,2)$, $(1,2)$. *Másrészt* $P(1) = a + b$ *és* $P(2) = 2a + b$, *így négy kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk. Ezek megoldása után könnyen látjuk, hogy a feladatnak megfelelő polinomok a következők:* $P(x) = x$, $P(x) = 3x - 4$, $P(x) = x - 3$ *és* $P(x) = 3x - 5$.

4. feladat: Határozzuk meg a

$$\sqrt{57-40\sqrt{2}}+\sqrt{68-48\sqrt{2}}$$

összeg értékét!

(Miko István)

Megoldás: *Jelöljük a keresett összeget S-sel. Ekkor*

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{57-40\sqrt{2}}+\sqrt{68-48\sqrt{2}}\\
S &= \sqrt{25-40\sqrt{2}+32}+\sqrt{36-48\sqrt{2}+32}\\
S &= \sqrt{(5-4\sqrt{2})^2}+\sqrt{(6-4\sqrt{2})^2}\\
S &= |5-4\sqrt{2}|+|6-4\sqrt{2}|\\
S &= 4\sqrt{2}-5+6-4\sqrt{2}\\
S &= 1.
\end{aligned}$$

A keresett összeg értéke tehát 1.

5. feladat: Legyenek a, b és c nullától és egymástól különböző olyan valós számok, amelyekre fennáll az

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$$

egyenlőség. Határozzuk meg az abc szorzat összes lehetséges értékét!

(Kekeňák Szilvia)

Megoldás: *Az egyenletek rendezésével:*

$$a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{b-c}{bc}.$$

Hasonlóan:

$$b-c=\frac{c-a}{ac}$$

és

$$c-a=\frac{a-b}{ab}.$$

Összeszorozva a 3 egyenletet:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}.$$

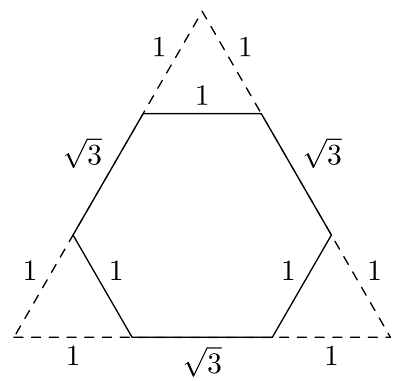
Mivel a, b és c páronként különbözőek, egyszerűsíthetünk $(a-b)(b-c)(c-a)$-vel, ahonnan $a^2b^2c^2=1$, ezért $abc=\pm 1$. Ne felejtsük el megmutatni, hogy léteznek olyan számhármasok, amelyre abc felveszi az adott értékeket. Például az $(1,-1/2,-2)$, ill. $(-1,1/2,2)$ esetében az abc értéke $+1$ ill. -1.

6. feladat: Állapítsuk meg annak a hatszögnek a területét, melynek minden belső szöge 120°, oldalainak hosszúsága pedig rendre 1; $\sqrt{3}$; 1; $\sqrt{3}$; 1 és $\sqrt{3}$.

(Fonód Tibor)

Megoldás: *Egészítsük ki a hatszöget egyenlő oldalú háromszöggé az 1. ábra szerint. A hatszög területét megkapjuk, ha a "nagy" háromszög területéből kivonjuk a 3 "kicsi" háromszög területét:*

$$T = \frac{1}{2} \cdot (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3+\sqrt{3}.$$



1. ábra.

XLI. Felvidéki Magyar Matematika Verseny
Oláh György Emlékverseny
Szenc 2017

2. évfolyam – Megoldások

1. feladat: Egy üzemben az igazgató 6 munkás között karácsonyi jutalmat akart kiosztani 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 arányban. Kiderült azonban, hogy az a munkás, aki a jutalomra szánt pénz 1/7-ét kapta volna, nem végezte el rendesen a feladatait, így az ő jutalmát az igazgató 1/3 résszel csökkentette, emiatt csak 21 600 tallért kapott. Az ő eredeti jutalmának 1/3 részét az igazgató úgy osztotta el a többiek között, hogy jutalmaik eredeti aránya megmaradt. Hány tallért kaptak az egyes további munkások?

(Fonód Tibor)

Megoldás: *A jutalom teljes összegét* $1+2+3+4+5+6 = 21$ *részre kell elosztani, ennek* $1/7$*-e tehát 3 részt jelent. Ezt csökkentve* $1/3$*-dal, a maradék* $2/3$ *rész (azaz 2 rész a 21-ből) tehát* 21600 *tallér, ebből egy rész* 10800 *tallér. A teljes összeg tehát* $21 \cdot 10800 = 226800$ *tallér, amiből* 21600*-at levonva a többieknek* 205200 *tallért kell szétosztani* $1 : 2 : 4 : 5 : 6$ *arányban (ami* 18 *rész), tehát az egyes további munkások rendre* 11400, 22800, 45600, 57000 *és* 68400 *tallért kaptak.*

2. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{x - \frac{1}{4}} = x^2 + \frac{1}{4}.$$

(Vincze Norbert)

Megoldás: *Nyilvánvaló feltétel:* $x \geq 1/4$. *Jelölje* $t = \sqrt{x - \frac{1}{4}} \geq 0$. *Ekkor az egyenletünk* $t = x^2 + \frac{1}{4}$ *alakot veszi fel, ahonnan* $t - x^2 = \frac{1}{4}$. *Viszont, ne feledjük, hogy* $t = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$, *ezt négyzetre emelve:* $t^2 = x - \frac{1}{4}$, *azaz* $\frac{1}{4} = x - t^2$. *Innen:*

$$\begin{aligned} t - x^2 &= x - t^2 \\ t^2 - x^2 + t - x &= 0 \\ (t - x)(t + x + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Nyilván $t + x + 1 \geq 0 + \frac{1}{4} + 1 > 0$ *miatt csak a* $t = x$ *eset lehetséges. Ezt visszahelyettesítve:*

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x - \tfrac{1}{4}} \\ x^2 &= x - \tfrac{1}{4} \\ x^2 - x + \tfrac{1}{4} &= 0 \\ (x - \tfrac{1}{2})^2 &= 0 \\ x &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Az egyetlen megoldás tehát $x = 1/2$, *amiről próbával győződhetünk meg.*

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges x és y valós számok esetén fennáll az

$$(x-1)(y+1) < x^2 + y^2$$

egyenlőtlenség!

(Vincze Norbert)

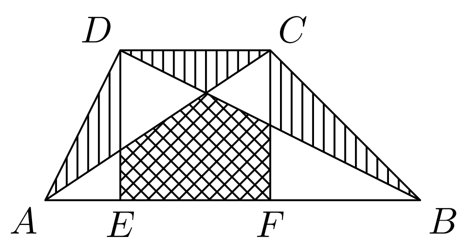
Megoldás: *Rendezzünk az egyenlőtlenséget:*

$$\begin{aligned} x^2+y^2-xy-x+y+1 &> 0 \\ 2x^2+2y^2-2xy-2x+2y+2 &> 0 \\ x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2+2y+1 &> 0 \\ (x-y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2 &> 0. \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség bal oldala három teljes négyzet összege, így biztosan nemnegatív. Nullával akkor lehetne egyenlő, ha mindhárom zárójelben nulla lenne, ami csak akkor áll fenn, ha $x = y$, $x = 1$ és $y = -1$, ami ellentmondás, így a bal oldal biztosan pozitív. Ezzel az állítást igazoltuk.

4. feladat: Adott az $ABCD$ trapéz. Az E és F pontok rendre a D és C csúcsok vetületei az AB oldalon. Bizonyítsuk be, hogy a függőlegesen satírozott területek összege egyenlő a duplán satírozott rész területével!

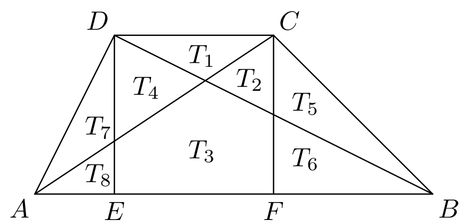
(Fonód Tibor)



Megoldás: *Jelöljük az egyes területeket a 2. ábra szerint. A DAC és DBC háromszögek területeinek összege éppen a $DEFC$ téglalap területével egyenlő, így*

$$T_1 + T_4 + T_7 + T_1 + T_2 + T_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

amiből $T_1 + T_7 + T_5 = T_3$, amit bizonyítani akartunk.



2. ábra.

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy annak a hatjegyű természetes számnak, melynek tízes számrendszerbeli alakja $\overline{xyxyxy}$, ahol $x, y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ és $x \neq 0$, nincs 97-nél nagyobb prímosztója.

(Mészáros József)

Megoldás: *Nyilván*

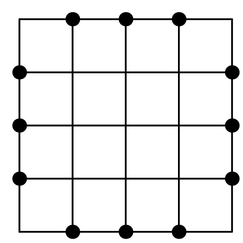
$$\begin{aligned}\overline{xyxyxy} &= 10^5x + 10^4y + 10^3x + 10^2y + 10x + y \\ &= 10101 \cdot (10x + y) = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (10x + y).\end{aligned}$$

Innen látható, hogy elég a $10x + y$ *prímosztóit vizsgálni. Mivel* $10x + y < 100$*, és a legnagyobb prímszám 97, amely nem nagyobb 100-nál, ezért az állítás könnyen belátható.*

6. feladat: Döntsük el, hogy készíthetünk-e egy 4m×4m méretű négyzethálót 5 darab 8 méteres kötéldarab segítségével, ha az egyes köteleket nem szabad elvágni.

(Fonód Tibor)

Megoldás: *Figyeljük a 3. ábrán kijelölt 12 pontot. Ezekből páratlan számú szakasz indul, tehát itt valamely kötéldarabkának végződnie (vagy kezdődnie) kell. Az 5 kötéldarabkának viszont csak összesen 10 végződése van, emiatt a négyzethálót nem tudjuk elkészíteni.*



3. ábra.

XLI. Felvidéki Magyar Matematika Verseny
Oláh György Emlékverseny
Szenc 2017

3. évfolyam

1. feladat: Az egész számok halmazán oldjuk meg az

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$$

egyenletet!

(Mészáros József)

Megoldás: *Szorozzuk be 4-gyel az egyenletet majd adjunk mindkét oldalához* $4xy + 1$*-et.*

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8xy + 4y^2 + 1 &= 4x^2y^2 + 4xy + 1 \\ 4(x+y)^2 + 1 &= (2xy+1)^2. \end{aligned}$$

Bevezetve az $X = 2xy + 1$ *és* $Y = 2(x+y)$ *jelöléseket kapjuk, hogy*

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Mivel X *és* Y *egész számok és négyzeteik különbsége 1, ez csak úgy lehet, ha* $Y = 0$ *és* $X \in \{-1; 1\}$*. Innen nyilván* $y = -x$ *és ezt behelyettesítve a másik feltételbe:* $1 - 2x^2 = \pm 1$*. A két másodfokú egyenlet megoldása után kapjuk, hogy a feladatnak három különböző megoldása van:* $(x, y) \in \{(0,0), (1,-1), (-1,1)\}$*.*

2. feladat: Találjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre teljesül, hogy $2p+1$ egy pozitív egész szám köbe.

(Kekeňák Tamás)

Megoldás: *A feladatban adott pozitív egész szám köbét jelölje* a^3*. Nyilván* $p = 2$ *nem megoldás, tehát tovább már feltételezhetjük, hogy* p *páratlan. A feladat alapján:* $2p + 1 = a^3$*, innen* a^3 *páratlan, azaz* a *is páratlan. Kissé átalakítva az egyenletet kapjuk:*

$$2p = a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1).$$

Mivel a *páratlan, és* $a^2 + a + 1 > 1$*, ezért muszáj, hogy* $a^2 + a + 1 = p$ *teljesüljön. Innen már látni, hogy* $a - 1 = 2$*, tehát* $a = 3$*, valamint* $2p + 1 = 27$*, ahonnan* $p = 13$*.*

3. feladat: Egy iskolai táncmulatság folyamán összesen 270 különböző pár táncolt. Az első lány 11 fiúval, a második lány 12 fiúval, . . . , az utolsó lány minden fiúval táncolt. Hány lány és hány fiú vett részt ezen a táncmulatságon?

(Miko István)

Megoldás: *Jelöljük a lányok számát* n*-nel. Az első lány* $(1 + 10)$ *fiúval, a második* $(2+10)$ *fiúval, . . . , az* n*-dik lány* $(n+10)$*, azaz minden fiúval táncolt. Így a táncoló párok száma:*

$$(1 + 10) + (2 + 10) + \ldots + (n + 10) = 270.$$

Az egyenlet baloldala egy számtani sorozat első n elemének az összege, tehát:

$$n \cdot \frac{(1+10)+(n+10)}{2} = 270.$$

Az egyenletet rendezve kapjuk a két gyököt: $n = 15$, illetve $n = -36$. A megoldások közül a 15 felel meg a feltételeknek, így lányok száma 15 a fiúk száma pedig 25.

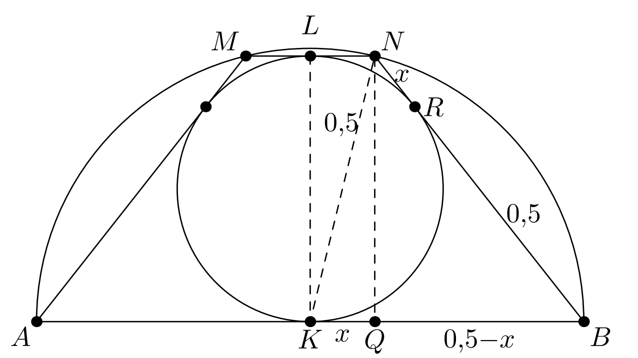
4. feladat: Az M és N pontok az $AB = 1$ hosszúságú szakasz fölé szerkesztett félkör pontjai, miközben az $ABMN$ négyszög olyan trapéz, melybe kör írható. Határozzuk meg a trapéz BM és AN szárainak hosszát!

(Fonód Tibor)

Megoldás: *Használjuk az 4. ábra jelöléseit. Az $ABMN$ szükségszerűen egyenlőszárú trapéz, és amennyiben x-szel jelöljük az $LN = NR = KQ$ szakaszok hosszát, úgy felírható a Pitagorasz tétel a KQN és BQN háromszögekre:*

$$NQ^2 = 0{,}5^2 - x^2 \quad \text{és} \quad NQ^2 = (0{,}5+x)^2 - (0{,}5-x)^2.$$

A két egyenlőség bal oldala megegyezik, így a jobb oldalak is egyenlőek. Az ebből kapott egyenlet pozitív megoldása $x = (\sqrt{5}-2)/2$.



4. ábra.

5. feladat: Adottak az a és b természetes számok. Tudjuk, hogy a és b relatív prímek és azt is, hogy $(a+b)/(a-b)$ egész szám. Mutassuk meg, hogy az $ab+1$ és $4ab+1$ számok valamelyike négyzetszám!

(Kekeňák Tamás)

Megoldás: *Legyen $\frac{a+b}{a-b} = m$. Ebből $a+b = ma - mb$. Rendezve: $\frac{a}{b} = \frac{m+1}{m-1}$. Mivel a és b relatív prímek $m+1 = ka$ és $m-1 = kb$, valamilyen megfelelő k egész esetén. Összeszorozva a két egyenletet: $m^2 - 1 = k^2ab$, tehát $m^2 = k^2ab + 1$. Mivel azonban k osztja az $m+1$ és $m-1$ számokat, így osztja a különbségüket is, ami egyenlő 2-vel. Tehát $k^2 = 1$ vagy $k^2 = 4$, ahonnan behelyettesítve az $m^2 = k^2ab + 1$ egyenletbe, már a bizonyítandó állítást kapjuk.*

6. feladat: Az x és y valós számokra teljesül az $x^2 + y^2 - 1 < xy$ egyenlőtlenség. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$x + y - |x - y| < 2.$$

(Mészáros József)

Megoldás:

Vezessük be az $u = x - 1$ és $v = y - 1$ jelöléseket. Ekkor az adott egyenlőtlenség az

$$u^2 + v^2 + u + v < uv$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens, a bizonyítandó egyenlőtlenség pedig az

$$u + v < |u - v|$$

alakot veszi fel.

A feladatunk tehát az, hogy az

$$u^2 + v^2 + u + v < uv \implies u + v < |u - v|$$

implikációt bizonyítsuk. Tegyük meg ezt indirekt módon, azaz feltételezzük, hogy

$$u^2 + v^2 + u + v < uv \quad \text{és} \quad u + v \geq |u - v|$$

egyszerre teljesülnek.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett áll fenn a második egyenlőtlenség. Két esetet különböztetünk meg:

1.) Ha $u \geq v$, akkor $u + v \geq |u - v| \iff u + v \geq u - v \iff v \geq -v \iff v \geq 0$.

2.) Ha $v \geq u$, akkor $u + v \geq |u - v| \iff u + v \geq v - u \iff u \geq -u \iff u \geq 0$.

Ebből az esettanulmányból következik, hogy a második egyenlőtlenség csak akkor állhat fenn, ha u és v egyike sem negatív.

Viszont ha u és v sem negatív, akkor

$$u^2 + v^2 + u + v \geq u^2 + v^2 \geq \frac{u^2 + v^2}{2} \geq uv,$$

ami ellentmondás az első egyenlőtlenséggel.

Összegezve tehát leszögezhető, hogy ha igaz az $u^2 + v^2 + u + v < uv$ egyenlőtlenség, akkor biztosan nem igaz az $u + v \geq |u - v|$ egyenlőtlenség, így $u + v < |u - v|$.

XLI. Felvidéki Magyar Matematika Verseny
Oláh György Emlékverseny
Szenc 2017

4. évfolyam

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a

$$V(n) = n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

kifejezés osztható 48-cal minden n természetes szám esetén!

(Mészáros József)

Megoldás: *Elsősorban vegyük észre, hogy $48 = 3^1 \cdot 2^4$. Mivel $V(n)$-ben van három egymást követő egész szám szorzata, ezért $3 \mid V(n)$. Így csak azt kell bebizonyítanunk, hogy $16 \mid V(n)$. Ehhez vizsgáljuk az n számot $4k$, $4k+1$, $4k+2$ és $4k+3$ alakban.*

(α) *Ha $n = 4k$, akkor $n^2 = 16k^2$, így $16 \mid V(n)$.*

(β) *Ha $n = 4k+1$, akkor $(n+1)^2 \cdot (n-1) = (16k^2 + 16k + 4) \cdot 4k$ osztható 16-tal.*

(γ) *Ha $n = 4k+2$, akkor $n^2(n-2) = (16k^2 + 16k + 4) \cdot 4k$ osztható 16-tal.*

(δ) *Ha $n = 4k+3$, akkor $(n+1)^2$ osztható 16-tal.*

Minden esetben $16 \mid V(n)$, ezzel bebizonyítottuk, hogy $48 \mid V(n)$ minden természetes n-re.

2. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x-16} = 2$$

egyenletet!

(Miko István)

Megoldás: *Az egyenlet baloldalának akkor van értelme, ha $x \geq 16$. Az $y = \sqrt[4]{x}$ és $y = \sqrt[4]{x-16}$ függvények szigorúan monoton növekvőek, így az összegük is szigorúan monoton növekvő. Az $y = 2$ értéket az $x = 16$ pontban felveszi és a monotonitás miatt már sehol máshol nem veheti fel, ezért a feladat egyetlen megoldása $x = 16$.*

3. feladat: Határozzuk meg az alábbi függvény értékkészletét:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 6}{x+1}.$$

(Fonód Tibor)

Megoldás: *Keressük tehát azon y számokat, melyre létezik olyan -1-től különböző x szám, melyre $y = (x^2 + 2x + 6)/(x+1)$. Ezt az egyenlőséget írjuk át az*

$$x^2 + (2-y)x + 6 - y = 0$$

alakba. Ha azt akarjuk, hogy létezzen megfelelő x érték, szükséges, hogy az előbbi másodfokú egyenlet diszkriminánsa nemnegatív legyen:

$$D = (2-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6-y) \geq 0$$

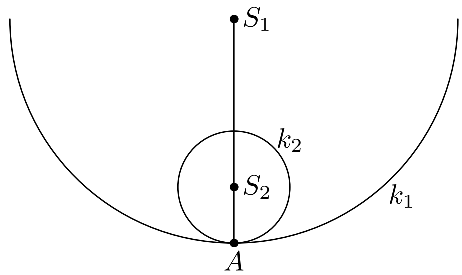
azaz

$$y \in (-\infty, -2 \cdot \sqrt{5}\rangle \cup \langle 2 \cdot \sqrt{5}, \infty).$$

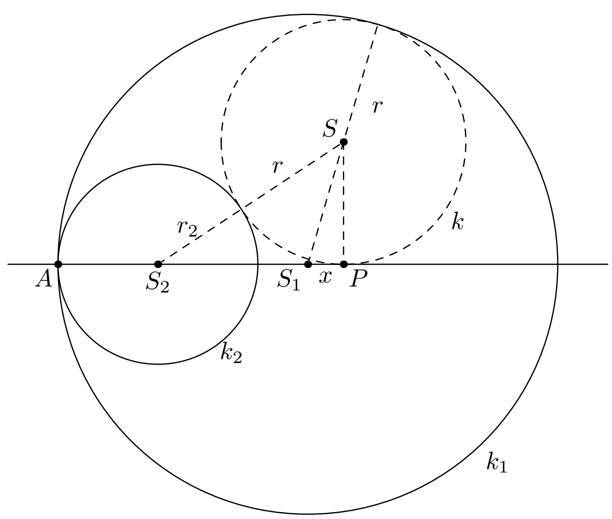
4. feladat: Adottak a $k_1(S_1, r_1)$ és $k_2(S_2, r_2)$ körvonalak, ahol $r_2 < r_1$. A körvonalak az A pontban belülről érintik egymást. (Lásd a mellékelt ábrát!)

Megszerkeszthető-e a $k(S, r)$ kör úgy, hogy a k_1 körvonalat belülről, a k_2 körvonalat kívülről érintse, és érintse az AS_1 egyenest is?

(Mészáros József)



Megoldás: *Legyen $k \equiv (S; r)$ és legyen P a k kör és az AS_1 egyenes érintési pontja. Jelöljük továbbá x-szel azt a számot, amelyre $|x| = S_1P$, valamint $x < 0$, ha P pont az S_1A félegyenesen, és $x > 0$, ha P az S_1A-val ellenkező félegyenesen fekszik. $P \equiv S_1$ esetén természetesen $x = 0$. Ekkor az S_1, S_2 és P pontok bármely elrendeződésénél $S_2P = r_1 - r_2 + x$. Legyen P az AS_1 azon pontja, ahol k érinti AS_1-et.*



5. ábra.

Az 5. ábra alapján felírjuk a Pitagorasz-tételt az SPS_1 háromszögre:

$$S_1S^2 = (r_1 - r)^2 = r^2 + x^2$$

amelyből

$$2r_1r = r_1^2 - x^2. \tag{1}$$

Az S_2PS háromszögből $(r_2 + r)^2 = r^2 + (r_1 - r_2 + x)^2$, vagyis

$$2r_2r = r_1^2 - 2r_1r_2 + 2(r_1 - r_2)x + x^2. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből kiküszöböljük r-et, ekkor x-re a

$$(r_1 + r_2)x^2 + 2r_1(r_1 - r_2)x + r_1^3 - 3r_1^2r_2 = 0 \tag{3}$$

másodfokú egyenletet kapjuk. A (3) egyenlet diszkriminánsa:

$$D = 4r_1^2(r_1 - r_2)^2 - 4(r_1 + r_2)(r_1^3 - 3r_1^2r_2) = 16r_1^2r_2^2. \tag{4}$$

A (4) alapján a (3) gyökei:

$$x_1 = \frac{r_1(3r_2 - r_1)}{r_1 + r_2}$$

és $x_2 = -r_1$ ami nem felel meg.

A feladatnak éppen akkor van megoldása, ha $|x| < r_1$, vagyis ha

$$\frac{|3r_2 - r_1|}{r_1 + r_2} < 1.$$

Ez az egyenlőtlenség egyenértékű a

$$3r_2 - r_1 < r_1 + r_2, \quad \textit{azaz} \quad r_1 < r_2;$$

illetve az

$$r_1 - 3r_2 < r_1 + r_2, \quad \textit{azaz} \quad 0 < r_2$$

egyenlőtlenségpárral, ami mindig teljesül. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy az (1) egyenletben szereplő r kielégíti a feladat feltételeit (x értéke negatív is lehet). Ehhez a r-hez két, AS_1 egyenesre nézve szimmetrikus megoldás tartozik.

5. feladat: Az a, b, c pozitív számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy érvényes

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5.$$

(Fonód Tibor)

Megoldás: *A $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$ kifejezés értéke növekszik, ha minden tagjához egy pozitív számot adunk hozzá, tehát*

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < \sqrt{4a^2+4a+1} + \sqrt{4b^2+4b+1} + \sqrt{4c^2+4c+1} =$$

$$= (2a+1) + (2b+1) + (2c+1) = 2(a+b+c) + 3 = 5.$$

6. feladat: Hány olyan 13 betű hosszúságú, A és B betűkből kirakott szó létezik, amelyben nem állhat két B betű közvetlenül egymás mellett?

(Kekeňák Tamás)

Megoldás: *A feladatot rekurziós módszerrel fogjuk megoldani. Jelöljük s_n-nel a feladatnak megfelelő n-hosszúságú szavak számát. Ezek közül s_{an}-nel, ill. s_{bn}-nel azokét, amelyek A-ra ill. B-re végződnek. Két segédállítást használunk fel: $s_{an} + s_{bn} = s_n$ (ez egyértelműen igaz) és $s_{an} = s_{n-1}$ (mivel minden $n-1$ hosszúságú szó végére hozzáadhatunk egy A betűt, és nyilván így kapjuk meg az összes A-ra végződő, n-hosszúságú szót). Könnyen belátjuk, hogy $s_1 = 2$, ill. $s_2 = 3$, mivel A, B ill. AB, BA, AA a feladatnak megfelelő egy ill. kettő hosszúságú szavak.*

Egy n hosszúságú szóból, amely B-re véződik, csak úgy kaphatunk $n+1$ hosszúságút, hogy hozzáteszünk egy A betűt. Azoknak a szavaknak a végére, amelyek A-ra végződnek, hozzátehetünk A és B betűt is. Így megkapjuk a rekurzív képletet:

$$s_{n+1} = 2s_{an} + s_{bn} = s_{an} + (s_{an} + s_{bn}) = s_n + s_{n-1}.$$

Innen már gyorsan ki tudjuk számolni a sorozat 13. tagját, ami 610.