XLI. Felvidéki Magyar Matematika Verseny
Oláh György Emlékverseny
Szenc 2017

1. évfolyam

1. FELADAT: Egy dobozban 12 000 azonos méretű kis kocka van. Legalább hány ilyen dobozra van szükségünk, ha a bennük lévő kis kockákból egyetlen nagy kockát szeretnénk kirakni úgy, hogy egyetlen kis kocka se maradjon ki?

2. FELADAT: Legfeljebb hány huszárt tudunk elhelyezni egy hagyományos 8×8-as sakktáblán úgy, hogy semmelyik kettő ne üsse egymást?

3. FELADAT: Határozzuk meg az összes olyan egész együtthatós $P(x) = ax + b$ polinomot, amelyre egyidejűleg teljesül:

$$P(1) < P(2) \qquad \text{és} \qquad (P(1))^2 + (P(2))^2 = 5.$$

4. FELADAT: Határozzuk meg a

$$\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} + \sqrt{68 - 40\sqrt{2}}$$

összeg értékét!

5. FELADAT: Legyenek a, b és c nullától és egymástól különböző olyan valós számok, amelyekre fennáll az

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

egyenlőség. Határozzuk meg az abc szorzat összes lehetséges értékét!

6. FELADAT: Állapítsuk meg annak a hatszögnek a területét, melynek minden belső szöge $120°$, oldalainak hosszúsága pedig rendre 1; $\sqrt{3}$; 1; $\sqrt{3}$; 1 és $\sqrt{3}$.

XLI. Felvidéki Magyar Matematika Verseny
Oláh György Emlékverseny
Szenc 2017

2. évfolyam

1. feladat: Egy üzemben az igazgató 6 munkás között karácsonyi jutalmat akart kiosztani 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 arányban. Kiderült azonban, hogy az a munkás, aki a jutalomra szánt pénz 1/7-ét kapta volna, nem végezte el rendesen a feladatait, így az ő jutalmát az igazgató 1/3 résszel csökkentette, emiatt csak 21 600 tallért kapott. Az ő eredeti jutalmának 1/3 részét az igazgató úgy osztotta el a többiek között, hogy jutalmaik eredeti aránya megmaradt. Hány tallért kaptak az egyes további munkások?

2. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

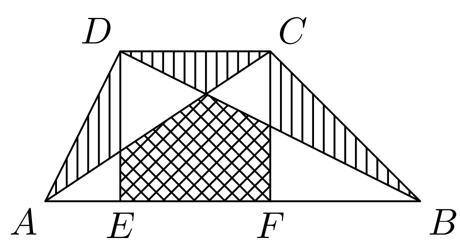
$$\sqrt{x-\frac{1}{4}}=x^2+\frac{1}{4}.$$

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges x és y valós számok esetén fennáll az

$$(x-1)(y+1)<x^2+y^2$$

egyenlőtlenség!

4. feladat: Adott az $ABCD$ trapéz. Az E és F pontok rendre a D és C csúcsok vetületei az AB oldalon. Bizonyítsuk be, hogy a függőlegesen satírozott területek összege egyenlő a duplán satírozott rész területével!



5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy annak a hatjegyű természetes számnak, melynek tízes számrendszerbeli alakja $\overline{xyxyxy}$, ahol $x, y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ és $x \neq 0$, nincs 97-nél nagyobb prímosztója.

6. feladat: Döntsük el, hogy készíthetünk-e egy 4m × 4m méretű négyzethálót 5 darab 8 méteres kötéldarab segítségével, ha az egyes köteleket nem szabad elvágni.

XLI. Felvidéki Magyar Matematika Verseny
Oláh György Emlékverseny
Szenc 2017

3. évfolyam

1. feladat: Az egész számok halmazán oldjuk meg az

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$$

egyenletet!

2. feladat: Találjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre teljesül, hogy $2p+1$ egy pozitív egész szám köbe.

3. feladat: Egy iskolai táncmulatság folyamán összesen 270 különböző pár táncolt. Az első lány 11 fiúval, a második lány 12 fiúval, ..., az utolsó lány minden fiúval táncolt. Hány lány és hány fiú vett részt ezen a táncmulatságon?

4. feladat: Az M és N pontok az $AB = 1$ hosszúságú szakasz fölé szerkesztett félkör pontjai, miközben az $ABMN$ négyszög olyan trapéz, melybe kör írható. Határozzuk meg a trapéz BM és AN szárainak hosszát!

5. feladat: Adottak az a és b természetes számok. Tudjuk, hogy a és b relatív prímek és azt is, hogy $(a+b)/(a-b)$ egész szám. Mutassuk meg, hogy az $ab+1$ és $4ab+1$ számok valamelyike négyzetszám!

6. feladat: Az x és y valós számokra teljesül az $x^2 + y^2 - 1 < xy$ egyenlőtlenség. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$x + y - |x - y| < 2.$$

XLI. Felvidéki Magyar Matematika Verseny
Oláh György Emlékverseny
Szenc 2017

4. évfolyam

1. FELADAT: Bizonyítsuk be, hogy a

$$V(n) = n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

kifejezés osztható 48-cal minden n természetes szám esetén!

2. FELADAT: Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x-16} = 2$$

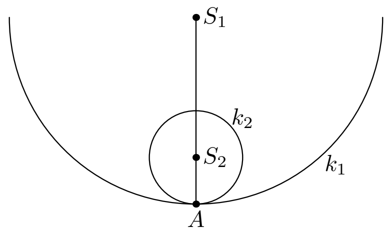
egyenletet!

3. FELADAT: Határozzuk meg az alábbi függvény értékkészletét:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 6}{x+1}.$$

4. FELADAT: Adottak a $k_1(S_1, r_1)$ és $k_2(S_2, r_2)$ körvonalak, ahol $r_2 < r_1$. A körvonalak az A pontban belülről érintik egymást. (Lásd a mellékelt ábrát!)

Megszerkeszthető-e a $k(S, r)$ kör úgy, hogy a k_1 körvonalat belülről, a k_2 körvonalat kívülről érintse, és érintse az AS_1 egyenest is?



5. FELADAT: Az a, b, c pozitív számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy érvényes

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5.$$

6. FELADAT: Hány olyan 13 betű hosszúságú, A és B betűkből kirakott szó létezik, amelyben nem állhat két B betű közvetlenül egymás mellett?