XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY

Zenta, 2016. december 3.

12. évfolyam

1. Melyik az a négyjegyű négyzetszám, melynek első két számjegye is és az utolsó két számjegye is egyenlő egymással?

2. Számold ki, hogy mennyivel egyenlő a $\sqrt[3]{3a+1+(a+3)\sqrt{a}}+\sqrt[3]{3a+1-(a+3)\sqrt{a}}$ **kifejezés értéke, ha tudjuk, hogy az** $a>0$ **egyenlőtlenség teljesül!**

3. Igazold, hogy ha valamely háromszögben a szögek tangensei számtani sorozatot képeznek, akkor a szögek kétszeresének szinuszai szintén számtani sorozatot alkotnak!

4. Az ABC **háromszögbe írt kör középpontján keresztül a** $BC=a$, $CA=b$ **és** $AB=c$ **oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyeken a háromszög sorra** m, n, p **szakaszokat metsz ki. Bizonyítsd be, hogy teljesül az**

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=2$$ **egyenlőség!**

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 12. évfolyam

1. Melyik az a négyjegyű négyzetszám, melynek első két számjegye is és az utolsó két számjegye is egyenlő egymással?

Megoldás: Írjuk fel a keresett négyzetszámot a következő alakban:

$A = 1000a + 100a + 10b + b$, ahol $a \neq 0$, valamint a és b egyjegyű.

$A = 1100a + 110b = 11(100a + b)$, vagyis az A négyzetszám osztható 11-gyel.

Ekkor osztható kell legyen a 11 szám négyzetével is, vagyis felírható, hogy:

$$A = 11(100a + b) = 11^2\left(\frac{100a + b}{11}\right) = 11^2\left(9a + \frac{a + b}{11}\right),$$

ahol $9a + \frac{a+b}{11}$ is egy négyzetszám, miközben $a + b$ osztható 11-gyel és a és b egyjegyű. Így csakis $a + b = 11$ lehetséges. Ekkor $9a + \frac{a+b}{11} = 9a + 1$ négyzetszám kell legyen, és közben $a \neq 0$. Ez csakis $a = 7$ esetén teljesül $\left(9a + 1 = 64 = 8^2\right)$, s ekkor $b = 4$.
A keresett négyzetszám tehát az $A = 7744 = 88^2$.

2. Számold ki, hogy mennyivel egyenlő a $\sqrt[3]{3a+1+(a+3)\sqrt{a}} + \sqrt[3]{3a+1-(a+3)\sqrt{a}}$ kifejezés értéke, ha tudjuk, hogy az $a > 0$ egyenlőtlenség teljesül!

Megoldás: Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\sqrt[3]{3a+1+(a+3)\sqrt{a}} + \sqrt[3]{3a+1-(a+3)\sqrt{a}} = \sqrt[3]{3a+1+a\sqrt{a}+3\sqrt{a}} + \sqrt[3]{3a+1-a\sqrt{a}-3\sqrt{a}} =$$

$$= \sqrt[3]{a\sqrt{a}+3a+3\sqrt{a}+1} + \sqrt[3]{-a\sqrt{a}+3a-3\sqrt{a}+1} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{a}+1\right)^3} - \sqrt[3]{a\sqrt{a}-3a+3\sqrt{a}-1} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(\sqrt{a}+1\right)^3} - \sqrt[3]{\left(\sqrt{a}-1\right)^3} = \sqrt{a}+1-\left(\sqrt{a}-1\right) = 2.$$

3. Igazold, hogy ha valamely háromszögben a szögek tangensei számtani sorozatot képeznek, akkor a szögek kétszeresének szinuszai szintén számtani sorozatot alkotnak!

Megoldás: Ha például $\alpha \le \beta \le \gamma$, akkor a feladat feltétele szerint $\mathrm{tg}\alpha, \mathrm{tg}\beta, \mathrm{tg}\gamma$ számtani sorozatot alkotnak, és így $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\gamma = 2\mathrm{tg}\beta$, vagyis

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = 2\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma} = 2\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha\cos\gamma} = 2\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

Mivel $\beta = 180^\circ - (\alpha+\gamma)$, így $\sin\beta = \sin\left(180^\circ - (\alpha+\gamma)\right) = \sin(\alpha+\gamma)$, és ekkor

$$\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\cos\gamma} = 2\frac{\sin\beta}{\cos\beta},$$

ahonnan

$$\cos\beta = 2\cos\alpha\cos\gamma\ .$$

Ekkor, a szorzat összeggé alakításának képletét alkalmazva a jobb oldalon

$$\cos\beta = 2\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha-\gamma)\right],$$

vagyis $\cos\beta = \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\alpha-\gamma)$.

Mivel $\cos\beta = \cos\left(180^\circ - \beta\right) + \cos(\alpha-\gamma)$,

és $\cos\beta = \cos 180^\circ \cos\beta + \sin 180^\circ \sin\beta + \cos(\alpha-\gamma)$

így $\cos\beta = -\cos\beta + \cos(\alpha-\gamma)$,

ahonnan $\cos(\alpha-\gamma) = 2\cos\beta$.

A feladat állítása szerint $\sin 2\alpha + \sin 2\gamma = 2\sin 2\beta$, ezt kellene bizonyítanunk.

A szorzattá alakítás képletéből kiindulva $\sin 2\alpha + \sin 2\gamma = 2\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)$.

Felhasználva az előzőleg levezetett összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha + \sin 2\gamma &= 2\sin\left(180^\circ - \beta\right)\cdot 2\cos\beta = \\ &= 4\cos\beta\left(\sin 180^\circ \cos\beta - \cos 180^\circ \sin\beta\right) = \\ &= 4\cos\beta\sin\beta = 2(2\sin\beta\cos\beta) = 2\sin 2\beta,\end{aligned}$$

ami azt igazolja, hogy $\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma$ valóban számtani sorozatot alkotnak.

4. Az ABC háromszögbe írt kör középpontján keresztül a $BC=a$, $CA=b$ és $AB=c$ oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyeken a háromszög sorra m, n, p szakaszokat metsz ki. Bizonyítsd be, hogy teljesül az

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=2 \text{ egyenlőség!}$$

Megoldás: Jelöljük az ABC háromszög területét T-vel, ekkor

$$T=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}.$$

Legyen r a beírt kör sugara. Mivel $ABC\Delta \sim BEF\Delta$, mert párhuzamosak az oldalaik, ezért alapjaik és magasságaik arányosak, azaz $\frac{n}{b}=\frac{h_b-r}{h_b}$. A párhuzamos oldalak miatt hasonlóan kapjuk, hogy $ABC\Delta \sim AHG\Delta$, ahonnan $\frac{m}{a}=\frac{h_a-r}{h_a}$, valamint hogy $ABC\Delta \sim CIJ\Delta$, ahonnan $\frac{p}{c}=\frac{h_c-r}{h_c}$.

Ebből adódik, hogy

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=\frac{h_a-r}{h_a}+\frac{h_b-r}{h_b}+\frac{h_c-r}{h_c}=3-r\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=$$
$$=3-r\cdot\left(\frac{a+b+c}{2T}\right)=3-r\cdot\frac{2s}{2sr}=3-1=2.$$