XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
Zenta, 2016. december 3.

10. évfolyam

1. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)<0,51\,?$$

2. Létezik-e olyan 2 egység oldalhosszúságú rombusz, amelyben az átlók összege egész szám? Ha van ilyen, akkor add meg az átlók hosszának pontos értékét!

3. A valós másodfokú $p(x)=ax^2+bx+c$ polinom (ahol az a nem nulla) minden x valós értékre teljesíti a $p(x)=\left(\dfrac{p(x+1)-p(x-1)}{2}\right)^2$ összefüggést. Add meg az $S=p(-3)-2p(0)+p(3)$ összeg pontos értékét!

4. Fekete Kalóz kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan kétharmada félszemű, háromnegyede falábú, négyötöde kampókezű, és öthatoda kopasz. A hajón a matrozók közül pontosan azok tisztek, akik félszeműek, falábúak, kampókezűek és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, és azt is tudjuk, hogy a tisztek matrózoknak is számítanak! Hány fős a kalózhajó legénysége?

A feladatok kidolgozására 120 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

XIV. FEKETE MIHÁLY EMLÉKVERSENY
MEGOLDÁSOK – 10. évfolyam

1. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)<0{,}51\,?$$

Megoldás: Közös nevezőre hozzuk a zárójelekben lévő kifejezéseket majd szorzattá alakítjuk a számlálókat és nevezőket, s az összes lehetséges egyszerűsítés elvégzése után a következő alakot kapjuk:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{4-1}{4}\cdot\frac{9-1}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\frac{n+1}{2n}.$$

Keressük tehát azt a legkisebb n értéket, amelyre $\frac{n+1}{2n}<0{,}51$, vagyis amelyre $\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{100}$, azaz $\frac{1}{2n}<\frac{1}{100}$. Az így kapott egyenlőtlenség megoldása $n>50$, így a legkisebb érték, amire teljesül az egyenlőtlenség az $n=51$.

2. Létezik-e olyan 2 egység oldalhosszúságú rombusz, amelyben az átlók összege egész szám? Ha van ilyen, akkor add meg az átlók hosszának pontos értékét!

I. Megoldás: Ha létezik ilyen rombusz, akkor az átlók felére és az oldalra felírt háromszög-egyenlőtlenség alapján: $\frac{e}{2}+\frac{f}{2}>2$, mert $e>2$ és $f>2$, azaz $e+f>4$, illetve $e<4$ és $f<4$, azaz $e+f<8$.

A kapott egyenlőtlenségek alapján egész megoldás csak az 5, 6 vagy 7 lehet. Viszont az $e^2+f^2=16$ egyenlőségnek is teljesülni kell az átlók merőlegessége miatt. A kapott egyenletrendszerek csak az $e+f=5$ esetén adnak megoldást. Ekkor

$e=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$ és $f=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$, vagy fordítva, tehát a keresett rombusz nem létezik.

II. Megoldás: Az átlók merőlegessége miatt $e^2+f^2=16$. Mivel $ef>0$, ezért

$16=e^2+f^2<(e+f)^2\le(e+f)^2+(e-f)^2=2\left(e^2+f^2\right)=32.$

16 és 32 között csak a 25 a négyzetszám, tehát $e+f=5$ az egyetlen megoldás. Ekkor

$e=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$ és $f=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$, vagy fordítva, tehát a keresett rombusz nem létezik.

3. A valós másodfokú $p(x)=ax^2+bx+c$ polinom (ahol az a nem nulla) minden x valós értékre teljesíti a $p(x)=\left(\frac{p(x+1)-p(x-1)}{2}\right)^2$ összefüggést. Add meg az $S=p(-3)-2p(0)+p(3)$ összeg pontos értékét!

Megoldás: Írjuk fel a megadott kifejezés jobb oldalát az a, b és c együtthatók segítségével:

$$p(x)=\left(\frac{p(x+1)-p(x-1)}{2}\right)^2=\left(\frac{a(x+1)^2+b(x+1)+c-a(x-1)^2-b(x-1)-c}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{4ax+2b}{2}\right)^2=(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2.$$

Mivel ez minden x-re megegyezik a $p(x)=ax^2+bx+c$ polinommal, ez csak úgy lehetséges, ha a megfelelő együtthatók megegyeznek, vagyis ha $a=4a^2$, tehát ha $a=\frac{1}{4}$, mivel a nem lehet nulla, $b=4ab=4\cdot\frac{1}{4}b=b$, vagyis b tetszőleges valós szám, és végül ha $c=b^2$. Ekkor $p(x)=\frac{1}{4}x^2+bx+b^2$**.** A keresett összeg

$$S=p(-3)-2p(0)+p(3)=\frac{1}{4}\cdot(-3)^2-3b+b^2-2b^2+\frac{1}{4}\cdot 3^2+3b+b^2=\frac{9}{2}.$$

4. Fekete Kalóz kapitány kalózhajóján a matrózoknak pontosan kétharmada félszemű, háromnegyede falábú, négyötöde kampókezű, és öthatoda kopasz. A hajón a matrozók közül pontosan azok tisztek, akik félszeműek, falábúak, kampókezűek és kopaszok is egyben. A tisztek száma 5, és azt is tudjuk, hogy a tisztek matrózoknak is számítanak! Hány fős a kalózhajó legénysége?

Megoldás: Először belátjuk, hogy a hajón $S=60m$ matróz van. A szöveg alapján a matrózok száma 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztható, de akkor osztható ezek legkisebb közös többszörösével is azaz 60-nal, tehát

$S=60$, $S=120$, $S=180$, ..., ha $m=1,2,3,\ldots$

Minden nem félszemű matróznak húzzunk a fejére egy kék sapkát, ekkor kiosztottunk $20m$ sapkát. Minden matróznak, aki nem falábú húzzunk a fejére egy piros sapkát, ekkor kiosztottunk $15m$ sapkát. Minden nem kampókezű matróznak húzzunk a fejére egy zöld sapkát, ekkor kiosztottunk $12m$ sapkát. Minden nem kopasz matróznak húzzunk a fejére egy fehér sapkát, ekkor kiosztottunk $10m$sapkát. Így összesen $57m$ darab sapkát osztottunk ki. Mivel a matrózok száma $60m$, legalább $3m$ olyan matróz van, akinek a fején nincs egyetlen sapka sem, ami éppen azt jelenti, hogy legalább $3m$ matróz rendelkezik mind a négy tulajdonsággal. Mivel a hajón van legalább 5 matróz, ezért az m értéke 2 vagy annál nagyobb, így $3m$ legalább 6, azaz ezek azok, akik mind a négy tulajdonsággal rendelkeznek. Mivel ez a feladat szerint pontosan 5, ezért $m=1$ lehetséges, vagyis a hajón pontosan 60 matróz szolgál. Hátra van még annak megmutatása, hogy 60 matrózzal kielégíthető a feladat állítása. Ezt mutatja az alábbi táblázatban az ellenőrzés:

Hány fő?	**Félszemű**	**Falábú**	**Kampókezű**	**Kopasz**
10	x	x	x	
12	x	x		x
13	x		x	x
2			x	x
18		x	x	x
5	x	x	x	x
60	**40**	**45**	**48**	**50**