A skatulyaelv és bizonyos sorozatok

HIMT, Gyula
2017. 04. 08.

Dr. Németh József
SZTE, TTIK, Bolyai Intézet

21 év (19)

50. tanévem az SZTE-n

Elemi matematika és felsőbb matematika határán (tanárképzésnél ez fontos; "kilincs").

Kiindulás: Riesz Frigyes; 1925 Rektori székfoglaló; "Elemi módszerek a felsőbb matematikában" (Elnézést kér...)

A **SKATULYAELV**-re épített ("a matematikusok között népszerű ötlet, amely számos probléma nyitjához vezetett és érdemei elismeréséül az **elv** rangját és méltóságát nyerte el.").

(4 szoba; párizsi nők; hajszálak $\leq$ 300.000: 70e - 100-120e - 120-150e, a lakosság 2.105.000).

Riesz: Dirichlet a sixtuszi kápolnában a húsvéti zene hallgatása közben jött rá a SZÁMELMÉLET egyik fontos tételére: $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, n\alpha$ között $\exists$ legalább egy, amelynek a legközelebbi egésztől vett eltérése $\leq \frac{1}{n}$.

Azaz $|q\alpha - p| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leq \frac{1}{q \cdot n} \leq \frac{1}{q^2}$ (Riesz ezt belátja a székfoglalón).

Én a mai előadást erre építem.

A **gyökér**: a Dirichlet-féle skatulyaelv (pigeon-hole principle; postai boxok)

1. Tétel. *Ha* α *irracionális szám, akkor* $\exists \frac{p_n}{q_n}$ $(p_n, q_n \in \mathbb{Z})$*, hogy*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Bizonyítás. Legyen n fix, $n \in \mathbb{N}$ és tekintsük a következő $(n+1)$ darab valós számot.

$$(*) \qquad 0,\ \alpha - [\alpha],\ 2\alpha - [2\alpha],\ \ldots,\ n\alpha - [n\alpha];$$

ezek mind beleesnek a $[0,1)$ intervallumba. Mivel a

$$(**) \qquad \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right),\ j = 0, 1, \ldots, n-1$$

lefedi a $[0,1)$-et, ezért kell lenni legalább két olyan pontnak (skatulyaelv) a $(*)$ pontok közül, mondjuk

$$n_1\alpha - [n_1\alpha] \text{ és } n_2\alpha - [n_2\alpha]\ (0 \leq n_1 < n_2 \leq n),$$

amelyek egy intervallumba esnek a $(**)$ intervallumok közül (u.i. $(*)$ $(n+1)$ pontot tartalmaz, $(**)$ pedig n db intervallumot).
Így

$$|n_2\alpha - [n_2\alpha] - (n_1\alpha - [n_1\alpha])| < \frac{1}{n},$$

azaz

$$|\underbrace{(n_2 - n_1)}_{q_n}\alpha - \underbrace{([n_2\alpha] - [n_1\alpha])}_{p_n}| < \frac{1}{n},$$

azaz

$$|\alpha \cdot q_n - p_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{q_n} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

(Ha n^* olyan, hogy az előbb kapott $|q_n \cdot \alpha - p_n| > \dfrac{1}{n^*}$, akkor újabb $\dfrac{p_n^*}{q_n^*}$ adódik úgy, hogy $|\alpha q_n^* - p_n^*| < \dfrac{1}{n^*}$, így újabb $\dfrac{p_n}{q_n}$-t kapunk, azaz végtelen sok ilyen tört adódik.

Megjegyzés: $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{c \cdot q^2}$; $c = \sqrt{5}$ a legjobb (Hurwitz).

2. Elemi probléma: $\{\cos n\}$ sorozat "viselkedése"

Az $y = \cos x$ grafikonja alapján: $\cos n$ végtelen sok n-re pozitív és végtelen sok n-re negatív, tehát (monotonitás kizárva; konvergencia? $a_n \to a$ mit jelent?) $\cos n \not\to a$ $(a \neq 0)$

Tfh $\cos n \to 0$, de $\cos^2 n = \dfrac{1+\cos 2n}{2} \Rightarrow 0 = \dfrac{1+0}{2}$ adódna, ami ellentmondás.

(Megjegyzés: integrálás; lineáris fgv.-transzformáció)

Kérdés: a $\{\cos n\}$ sorozat viselkedése (korlátos; B.-W.)

$\overset{?}{\exists}\, n_k\colon n_1, n_2, \ldots, n_k \ldots$ úgy, hogy $\cos n_k \to 0$.

Pl.: $n_k \overset{?}{\to} \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos n_k \to \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, de n_k és $\dfrac{\pi}{2}$ távolsága $\geq 0,4\ldots$

Viszont tudjuk: $\left|2\pi - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n^2} \Rightarrow |2\pi q_n - p_n| < \dfrac{1}{q_n}$, azaz $|2\pi q_n - p_n|$ b.milyen kicsi lehet, így ezt felmérjük 0-tól, $\dfrac{\pi}{2}$-et tetszőlegesen meg tudjuk közelíteni és így ha $2\pi\hat{q}_n - \hat{p}_n \to \dfrac{\pi}{2}$, akkor

$$\underbrace{\cos(2\pi\hat{q}_n - \hat{p}_n)}_{\cos(-\hat{p}_n)} \to \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$\cos|\hat{p}_n| \to 0$, azaz $|\hat{p}_n|$ kívánt részsorozat.

Így megmutathatjuk, hogy $\exists n'_k\colon \cos n'_k \to 1$,

$\exists n_k'' \colon \cos n_k'' \to -1, \exists n_k''' \colon \cos n_k''' \to \dfrac{1}{3} \dots$

TÉTEL. Legyen α egy irracionális szám, ekkor az $A = \{m + n\,\alpha \colon m, n \in \mathbb{Z}\}$ halmaz mindenütt sűrű $\mathbb{R}$-ben, azaz minden intervallum tartalmaz legalább egy elemet A-ból. (De akkor minden intervallum végtelen sok elemet is tartalmaz A-ból.)

Bizonyítás. Legyen (a, b) tetszőleges intervallum, megmutatjuk, hogy legalább egy eleme A-nak beleesik ebbe az intervallumba. Legyen $0 < \varepsilon = b - a$. Ismert, hogy $\exists\, p_n, q_n$ úgy, hogy

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2},$$

és mivel $q_n \to \infty$, ezért

$$|\alpha q_n - p_n| < \frac{1}{q_n} < \varepsilon$$

fennáll m.m. n-re. Vegyük $c \overset{\text{def}}{=} |q_n \cdot \alpha - p_n|$, ahol p_n, q_n a fenti tulajdonságú.
Ekkor viszont van legalább egy m (egész szám) úgy, hogy $m \cdot c$ az (a, b) intervallumba esik. (Részeg)
Azaz $m \cdot q_n\alpha - m \cdot p_n$ vagy $-m \cdot q_n\alpha + m \cdot p_n$ az (a, b)-be esik.

3. TÉTEL. A $\{\cos n\colon n \in \mathbb{N}\}$ halmaz sűrű a $[-1;1]$-ben.
(Azaz a $[-1;1]$ minden t pontja a $\{\cos n\}$ sorozat torlódási pontja, azaz t bármely környezetében benne van a sorozat végtelen sok tagja, vagy $\exists\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ természetes számok növő sorozata úgy, hogy $\cos n_k \to t$.)

Bizonyítás. Legyen $t \in [-1;1]$. Akkor $\exists x\colon t = \cos x$. Miért? Az előző tétel szerint $\exists\{m_n\}$ és $\{k_n\}$ egész számok sorozata úgy, hogy $x = \lim\limits_{n\to\infty}(k_n 2\pi + m_n)$; ebből viszont a cosinus fgv. folytonosságából adódik:

$$\begin{aligned} t = \cos x = \cos(\lim_{n\to\infty}(k_n 2\pi + m_n) &= \\ = \lim_{n\to\infty}[\cos(k_n 2\pi + m_n)] &= \\ = \lim_{n\to\infty}\cos m_n = \lim_{n\to\infty}\cos|m_n|&. \end{aligned}$$

Így adódott, hogy a $[-1;1]$ int. minden pontja torlódási pontja a $\{\cos n\}$ sorozatnak. ($\sin n$ hasonló)
Nyilván nem vesz fel minden $t \in [-1;1]$ értéket, csak "tetszőlegesen közel kerülnek" a sorozat elemei. Pl. $\not\exists\, n$, hogy $\cos n = \dfrac{1}{3}$. Miért?

Kérdés: $\cos n$ racionális vagy irracionális?

$\cos n, \sin n$, racionális, irracionális?

1) Ha $r \neq 0$ rac., akkor $\cos r$ irracionális. (Hermite 1873; "elemi" bizonyítás)
$\Rightarrow \sin r, \operatorname{tg} r$ irracionális
$\cos 2r = \cos^2 r - \sin^2 r = 1 - 2\sin^2 r$
$\cos 2r = \cos^2 r - \sin^2 r = \dfrac{\cos^2 r - \sin^2 r}{\cos^2 r + \sin^2 r} =$
$\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 r}{1 + \operatorname{tg}^2 r}$; sőt π irrac.

2) Ha $r \neq 0$ rac., akkor $\cos r, \sin r, \operatorname{tg} r$ **TRANSZCENDENS** (Lindemann 1883) (Baker 1975) (v.ö. $\pi; e$)

4. Probléma: Konvergens-e a $\dfrac{\operatorname{tg} n}{n}$ sorozat?

(Előzmény: $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \cdots = \log_e \sqrt[3]{2} + \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; $\sum\limits_1^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{tg} n}{n}$)

Állítjuk, hogy nem, ugyanis először megmutatjuk, hogy ha $\dfrac{\operatorname{tg} n}{n}$ konvergens lenne, akkor csak 0-hoz tarthatna, ugyanis $n_k = [k\pi]$ esetén $\left|\dfrac{\operatorname{tg} n_k}{n_k}\right| \leq$

$\frac{\sqrt{3}}{n_k} \to 0$, ha $k \to \infty$ (hiszen $|n_k - k\pi| < 1 < \frac{\pi}{3}$).

Segédtétel. Legyen α irracionális szám. Ekkor létezik végtelen sok p, q egész szám úgy, hogy

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

Most térjünk rá az eredeti állítás bizonyítására:

Legyen $\alpha = \frac{\pi}{2}$, q-t pedig vegyük 1-nél nagyobb páratlan számnak úgy, hogy fennáljon, hogy

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{q^2}, \quad \text{azaz} \quad \left|p - q \cdot \frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{q} < \frac{\pi}{4}.$$

Mivel q páratlan, a ctg függvény differenciálható a

$$\left[q\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}; \quad q\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{intervallumon.}$$

Így a Lagrange-féle középérték-tétel szerint

$\exists$ z a p és $q\frac{\pi}{2}$ között úgy, hogy

$$(*) \quad |\operatorname{ctg} p| = \left|\operatorname{ctg} p - \operatorname{ctg} q\frac{\pi}{2}\right| = \left|p - q\frac{\pi}{2}\right| \frac{1}{\sin^2 z}.$$

Mivel $\frac{1}{sin^2 z} \leq 2$, így $(*)$-ból kapjuk, hogy

$$|\operatorname{ctg} p| \leq 2\left|p - q\frac{\pi}{2}\right| \Rightarrow |\operatorname{tg} p| \geq \frac{1}{2\left|p - q\frac{\pi}{2}\right|} \geq \frac{q}{2} \geq \frac{p}{4}$$

végtelen sok p-re

$$\left|\frac{\operatorname{tg} p}{p}\right| \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} n}{n} \not\to 0.$$

Megjegyzés: $\frac{\operatorname{tg} n}{n^2}, \ldots, \frac{\operatorname{tg} n}{n^7}?, \frac{\operatorname{tg} n}{n^8} \to 0$ (rövid, fél oldalas bizonyítás - erről később)

Részeredmény: $\frac{|\operatorname{tg} n|}{n^2} \leq \frac{11 \cdot 000 \cdot 000}{n}$, ha $n \leq 10^{8\,000\,000}$ (u.a. cikk).

Math. Magazine (Vol. 72, No. 5, Dec, 1999), IRA Rosenholtz

TÉTEL. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg} n}{n^8} = 0$

Gondolatok a bizonyításhoz:

K. Mahler 1953-ban [On the appr. of π, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 56(1953), 30-42] megmutatta:

$$|\pi - p/q| > \frac{1}{q^{42}},\ \forall\, q \geq 2\text{-re},$$

és ugyanakkor

$$|\pi - p/q| > \frac{1}{q^{30}},$$

ha q elég nagy.

M. Mignotte 1974-ben javította 30-at 20-ra [Bull. Soc. Math. France Mem., 37(1974), 121-132]

$\vdots$

M. Hata 1993-ban ezt az "irrationality measure"-t 8,02- re javította [Acta Arithmetica, 63(1993), 335-349], azaz $\exists Q$, hogy ha $q > Q$, akkor

$$(*)\qquad |\pi - p/q| > \frac{1}{q^{8,02}} \text{ minden } p\text{-re.}$$

A 8,02 miatt adódik a $\dfrac{\operatorname{tg} n}{n^8} \to 0$. $(*)$-t és a Lagrange-féle k.é.tétel - és kész (ld. az előbb említett cikk).

Tétel: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg} n}{n^8} = 0$

Bizonyítás. Hata eredményéből következik, hogy van olyan Q, hogy ha $q \geq Q$ és r tetszőleges egész, akkor $\left|\pi - \dfrac{r}{q}\right| > \dfrac{1}{q^{8,02}}$. Speciálisan $r = 2p$-re az áll, hogy $\left|\pi - \dfrac{2p}{q}\right| > \dfrac{1}{q^{8,02}}$. Ebből adódik, hogy

$$\left|q \cdot \frac{\pi}{2} - p\right| > \frac{1}{2 \cdot q^{7,02}}.$$

Legyen p pozitív egész és q olyan pozitív egész, hogy fennálljon

$$\left|p - q \cdot \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Feltehetjük, hogy q "elegendően nagy". Ha q páros, akkor $|\operatorname{tg} p| < 1$, így $\dfrac{|\operatorname{tg} p|}{p^8} < \dfrac{1}{p^8}$, ami "nagyon kicsi". Ha q páratlan, akkor - alkalmazva a Lagrange-féle középértéktételt - hasonlóan, mint előbb, azt kapjuk, hogy

$$|\operatorname{ctg} p| = \left|\operatorname{ctg} p - \operatorname{ctg} q \cdot \frac{\pi}{2}\right| = \left|p - q \cdot \frac{\pi}{2}\right| \cdot$$

$$\cdot \left|\frac{1}{\sin^2 c}\right| \geq 1 \cdot \left|p - q \cdot \frac{\pi}{2}\right|,$$

amiből

$$|\operatorname{tg} p| \leq \frac{1}{\left|p - q \cdot \frac{\pi}{2}\right|} < 2 \cdot q^{7,02}.$$

Így, mivel $\left|p - q \cdot \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{4}$-ből $q \leq p$ adódik, azt kapjuk, hogy $\frac{|\operatorname{tg} p|}{p^8} \leq 2 \cdot p^{-0,08}$, tehát $\frac{\operatorname{tg} p}{p^8}$ "kicsi".

Tehát $\frac{\operatorname{tg} n}{n^8} \to 0$.

V. Kh Salikov 2008-ban [On the irrationality Measure of π, Russ. Math. Surv., 63(2008), 570-572] Irrationality measure: $\mu(\pi) \leq 7,6063$; azaz

$$|\pi - p/q| \geq \frac{1}{q^{7,6063}}.$$

Így ebből $\Rightarrow \dfrac{\operatorname{tg} n}{n^7} \to 0$ (!)

Végül:

Max. A. Alexeev 2011-ben belátta, hogy ha az ú.n. Flint Hills series $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 \sin(n^2)}\right)$ konv., akkor $\mu(\pi) \le 2,5$ lenne. (Egyébként algebrai irracionális számokra $\mu = 2$)

(**Megj.:** ha ez teljesülne, akkor $\dfrac{\operatorname{tg} n}{n^2} \to 0$ biz.ható lenne)

Megjegyzés: (Inter. Journal of Math. Analysis Vol. 10, 2016, no. 12, 573-577.

"On the Convergence of Some Special Series" (M.A. Chakhkiev, M.A. Ziroyan, N.P. Tretyakov)

A Flint Hills sor általánosabb eseteivel foglalkoznak (3 és 2 helyett más paraméterekkel, sőt fgv.sorral, azonban az eredeti esetre nincs konklúzió)

2016!!

Tétel (Alexeev) *Ha* $\mu(\pi) > 1 + \dfrac{u}{v}$, *akkor* $\dfrac{1}{n^u |\sin n|^v}$ *divergens* $(u, v \in \mathbb{R}^+)$

Következmény. Ha $\dfrac{1}{n^3 |\sin n|^2}$ *konvergens, akkor*

$\mu(\pi) \leq 1 + \frac{3}{2}(= 2,5)$ *és akkor* $\frac{\operatorname{tg} n}{n^2} \to 0$.

Bizonyítás. Ha $\mu(\pi) > 1 + \frac{u}{v}$, akkor $k = 1 + \frac{u}{v}$ esetén az

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}$$

végtelen sok p, q-ra fennáll.
Azaz $\exists\{p_i\}$ és $\{q_i\}$ úgy, hogy

$$|p_i - \pi q_i| < \frac{1}{q_i^{k-1}}.$$

Ekkor viszont *egyrészt*

$$|\sin(p_i)| = |\sin(p_i - q_i\pi)| \leq |p_i - q_i\pi| < \frac{1}{q_i^{k-1}} < C\frac{1}{p_i^{k-1}}$$

fennáll valamilyen $C > 0$ számra (ami k-tól függ).
Így, ha $n = p_i$, akkor

$$\frac{1}{|\sin n|^v} > C^{-v} n^{(k-1)v}, \quad \text{majd}$$

$$\frac{1}{n^u |\sin n|^v} > C^{-v} n^{(k-1)v} \cdot n^{-u} = C^{-v}$$

$$\text{hiszen } (k-1)v - u = 0)$$

Másrészt

$$|\sin(1+p_i)| = |\sin(1+p_i - q_i\pi)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \sin 1,$$

ahonnan

$$\frac{1}{(1+p_i)^u |\sin(1+p_i)|^v} \to 0.$$

Így valóban divergens a kívánt sorozat.