Fibonacci- számok és tányérok

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2017. április 8.

A Fibonacci-sorozat

A Fibonacci-sorozat

Rekurzív definíció

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

A Fibonacci-sorozat

Rekurzív definíció

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1,$$

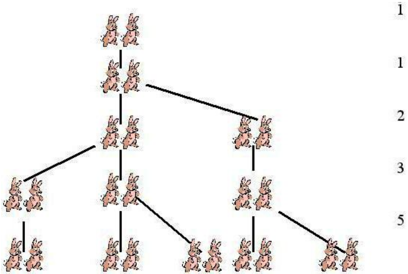
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

n :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n :	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Eredet

Eredet

- Európa: Fibonacci, Liber Abaci (1202).



- India: Szankrit verselés tanulmányozása ($\ll$ 1000).

Kombinatorikus definíciók

Kérdés

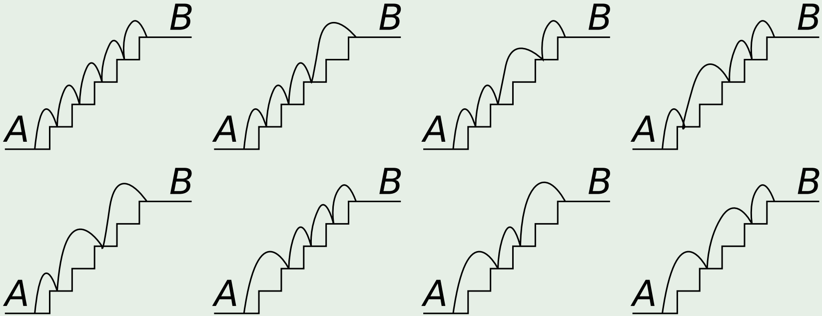
n lépcsőfok vezet fel A-ból B-be. Egy vagy két lépcsőfokot tudunk egyszerre fellépni. Hányféleképpen juthatunk fel A-ból B-be?

Kombinatorikus definíciók

Kérdés

n lépcsőfok vezet fel A-ból B-be. Egy vagy két lépcsőfokot tudunk egyszerre fellépni. Hányféleképpen juthatunk fel A-ból B-be?

$n = 5$

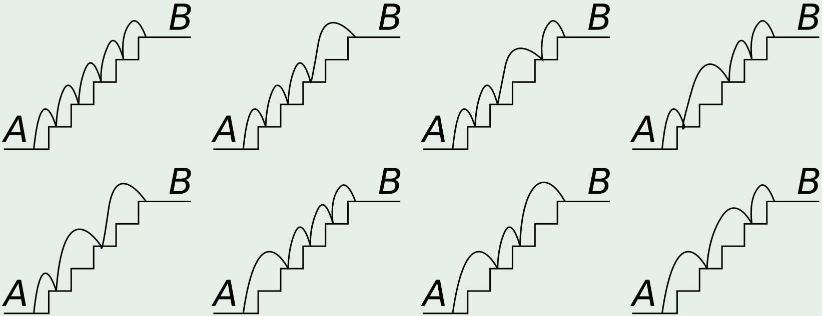


Kombinatorikus definíciók

Kérdés

n lépcsőfok vezet fel A-ból B-be. Egy vagy két lépcsőfokot tudunk egyszerre fellépni. Hányféleképpen juthatunk fel A-ból B-be?

$n = 5$



A válasz F_{n+1}.

Kombinatorikus definíciók II.

Kérdés

Hányféleképpen írható fel n az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

Kombinatorikus definíciók II.

Kérdés

Hányféleképpen írható fel n az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

$n = 6$

$$1+1+1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+2, \quad 1+1+1+2+1,$$

$$1+1+2+1+1, \quad 1+1+2+2, \quad 1+2+1+1+1,$$

$$1+2+1+2, \quad 1+2+2+1, \quad 2+1+1+1+1, \quad 2+1+1+2,$$

$$2+1+2+1, \quad 2+2+1+1, \quad 2+2+2.$$

Kombinatorikus definíciók II.

Kérdés

Hányféleképpen írható fel n az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

$n = 6$

$$1+1+1+1+1+1,\quad 1+1+1+1+2,\quad 1+1+1+2+1,$$
$$1+1+2+1+1,\quad 1+1+2+2,\quad 1+2+1+1+1,$$
$$1+2+1+2,\quad 1+2+2+1,\quad 2+1+1+1+1,\quad 2+1+1+2,$$
$$2+1+2+1,\quad 2+2+1+1,\quad 2+2+2.$$

A kérdés izomorf az előzővel. A válasz F_{n+1}.

Fibonacci-számok és a Pascal-háromszög

Kérdés

Hányféleképpen írható fel n az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

Kérdés

Hányféleképpen írható fel n az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

Válasz

Kérdés

Hányféleképpen írható fel n az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

Válasz

- Csoportosítsuk a lehetőségeket a 2 tagok száma (k) szerint.

Kérdés

Hányféleképpen írható fel n az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

Válasz

- Csoportosítsuk a lehetőségeket a 2 tagok száma (k) szerint.
- Az összes tag száma $(n-2k)+k=n-k$.

Kérdés

Hányféleképpen írható fel n az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

Válasz

- Csoportosítsuk a lehetőségeket a 2 tagok száma (k) szerint.
- Az összes tag száma $(n-2k)+k=n-k$.
- Adott k esetén $\binom{n-k}{k}$ lehetőség van.

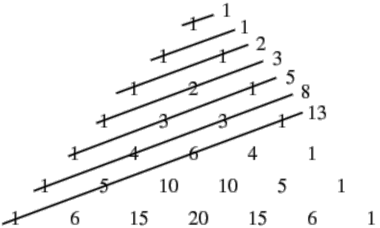
Fibonacci-számok és a Pascal-háromszög

Kérdés

Hányféleképpen írható fel n az 1 és 2 számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

Válasz

- Csoportosítsuk a lehetőségeket a 2 tagok száma (k) szerint.
- Az összes tag száma $(n-2k)+k=n-k$.
- Adott k esetén $\binom{n-k}{k}$ lehetőség van.



Kombinatorikus definíciók III.

Kérdés

Hányféleképpen írható fel a pozitív n szám pozitív páratlan számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

Kombinatorikus definíciók III.

Kérdés

Hányféleképpen írható fel a pozitív n szám pozitív páratlan számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

$n = 7$

$$1+1+1+1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+3, \quad 1+1+1+3+1,$$

$$1+1+3+1+1, \quad 1+3+1+1+1, \quad 3+1+1+1+1,$$

$$1+3+3, \quad 3+1+3, \quad 3+3+1,$$

$$1+1+5, \quad 1+5+1, \quad 5+1+1, \quad 7.$$

Kombinatorikus definíciók III.

Kérdés

Hányféleképpen írható fel a pozitív n szám pozitív páratlan számok összegeként? A tagok sorrendje számít.

$n = 7$

$$1+1+1+1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+3, \quad 1+1+1+3+1,$$

$$1+1+3+1+1, \quad 1+3+1+1+1, \quad 3+1+1+1+1,$$

$$1+3+3, \quad 3+1+3, \quad 3+3+1,$$

$$1+1+5, \quad 1+5+1, \quad 5+1+1, \quad 7.$$

A kérdés izomorf* az előzővel. A válasz F_n.

Talán a matematika legismertebb sorozata

A Fibonacci-számokkal gyakran találkozhatunk a természetben.

A Fibonacci-számokkal gyakran találkozhatunk a természetben.

Központi botanikai kérdéskör

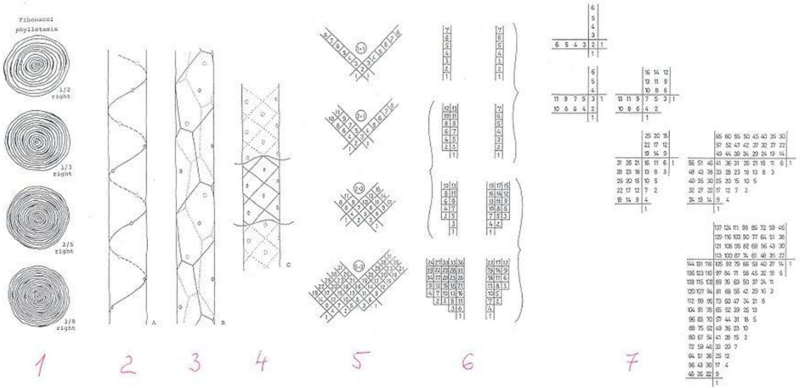
A levélállás, levélhelyezkedés vagy ághelyzet (phyllotaxis) vizsgálata.

A Fibonacci-számokkal gyakran találkozhatunk a természetben.

Központi botanikai kérdéskör

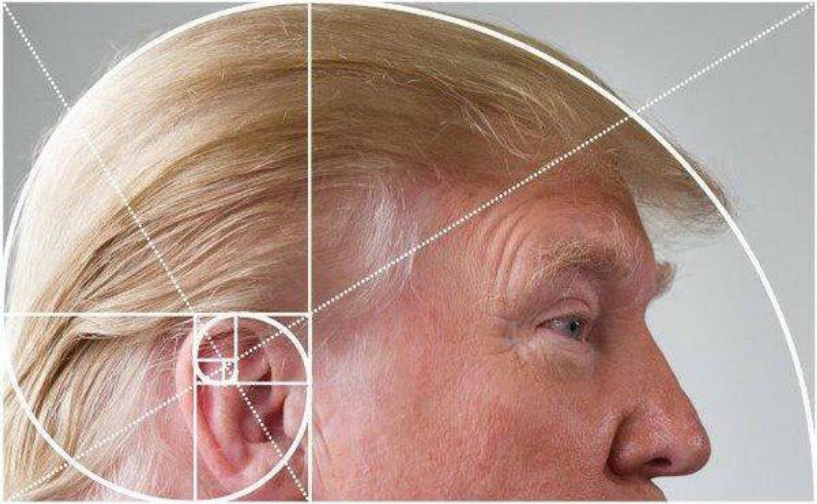
A levélállás, levélhelyezkedés vagy ághelyzet (phyllotaxis) vizsgálata.

. . ., Alan Turing, . . ., John Horton Conway, . . .



Talán a matematika legismertebb sorozata: Nem minden arany ami fénylik

Talán a matematika legismertebb sorozata: Nem minden arany ami fénylik



Talán a matematika legismertebb sorozata: Hollywood

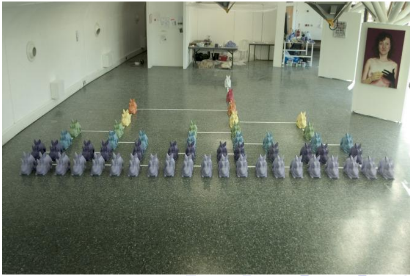
Talán a matematika legismertebb sorozata: Hollywood

Talán a matematika legismertebb sorozata: Wall Street

Talán a matematika legismertebb sorozata: Wall Street

Talán a matematika legismertebb sorozata: Művészet

Talán a matematika legismertebb sorozata: Művészet



Talán a matematika legismertebb sorozata: Comics

Talán a matematika legismertebb sorozata: Comics


MOM SEWED ONE SPARKLY HERE AND HERE
TWO SPARKLIES HERE
THREE SPARKLIES
FIVE SPARKLIES
EIGHT SPARKLIES
THIRTEEN...
2-25
FIBONACCI SEQUINS, OF COURSE.
MATH TEACHERS SHOULDN'T KNIT.
MALLETT

Fibonacci-számok növekedése

Fibonacci-számok növekedése

Észrevétel

- $$F_0 < F_1 = F_2 < F_3 < F_4 < F_5 < F_6 < F_7 < F_8 < F_9 < \dots,$$
- $$2F_{n-2} \leq F_n \leq 2F_{n-1}, \qquad \text{ha } n \geq 2$$
- $$2^{n/2} \leq F_n \leq 2^n, \qquad \text{ha } n \geq 6.$$

Kettő hatványok vs Fibonacci számok

Kettő hatványok

Fibonacci-számok

Kettő hatványok vs Fibonacci számok

Kettő hatványok

- $$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

Fibonacci-számok

- $$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Kettő hatványok vs Fibonacci számok

Kettő hatványok

- $$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$
- $$k_n = 2^n$$

Fibonacci-számok

- $$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$
- $$F_n$$

Kettő hatványok vs Fibonacci számok

Kettő hatványok

- $$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$
- $$k_n = 2^n$$
- $$k_{n+1} = 2k_n = k_n + k_n$$

Fibonacci-számok

- $$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$
- $$F_n$$
- $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Kettő hatványok

- $$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$
- $$k_n = 2^n$$
- $$k_{n+1} = 2k_n = k_n + k_n$$
- Ha $k_n \leq N < k_{n+1}$, akkor

  $$N = k_n + M, \text{ ahol } M < k_n$$

Fibonacci-számok

- $$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$
- $$F_n$$
- $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$
- Ha $F_n \leq N < F_{n+1}$, akkor

  $$N = F_n + M, \text{ ahol } M < F_{n-1}$$

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{32}\quad \underbrace{16}\quad \underbrace{8}\quad \underbrace{4}\quad \underbrace{2}\quad \underbrace{1}$

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$\underbrace{13}\quad \underbrace{8}\quad \underbrace{5}\quad \underbrace{3}\quad \underbrace{2}\quad \underbrace{1}$

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{32}\quad\underbrace{16}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

- Példa: 19

  $\underbrace{32}\quad\underbrace{16}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{13}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

- Példa: Egy híján húsz.

  $\underbrace{13}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{32}\quad\underbrace{16}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

- Példa: 19

  $\underbrace{32}_{0}\quad\underbrace{16}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{13}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

- Példa: Egy híján húsz.

  $\underbrace{13}_{1}\quad\underbrace{8}_{0}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{32}\quad\underbrace{16}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

- Példa: 19

  $\underbrace{32}_{0}\quad\underbrace{16}_{1}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{13}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

- Példa: Egy híján húsz.

  $\underbrace{13}_{1}\quad\underbrace{8}_{0}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$$\underbrace{32}\quad\underbrace{16}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$$

- Példa: 19

$$\begin{array}{cccccc}\underbrace{32} & \underbrace{16} & \underbrace{8} & \underbrace{4} & \underbrace{2} & \underbrace{1} \\ 0 & 1 & \color{red}{0} & & & \end{array}$$

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$$\underbrace{13}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$$

- Példa: Egy híján húsz.

$$\begin{array}{cccccc}\underbrace{13} & \underbrace{8} & \underbrace{5} & \underbrace{3} & \underbrace{2} & \underbrace{1} \\ 1 & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{0} & & \end{array}$$

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{32} \quad \underbrace{16} \quad \underbrace{8} \quad \underbrace{4} \quad \underbrace{2} \quad \underbrace{1}$

- Példa: 19

  $\underbrace{32} \quad \underbrace{16} \quad \underbrace{8} \quad \underbrace{4} \quad \underbrace{2} \quad \underbrace{1}$

  0 1 0 0

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{13} \quad \underbrace{8} \quad \underbrace{5} \quad \underbrace{3} \quad \underbrace{2} \quad \underbrace{1}$

- Példa: Egy híján húsz.

  $\underbrace{13} \quad \underbrace{8} \quad \underbrace{5} \quad \underbrace{3} \quad \underbrace{2} \quad \underbrace{1}$

  1 0 1 0

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$$\underbrace{32}\quad\underbrace{16}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$$

- Példa: 19

$$\underbrace{32}_{0}\quad\underbrace{16}_{1}\quad\underbrace{8}_{0}\quad\underbrace{4}_{0}\quad\underbrace{2}_{\color{red}1}\quad\underbrace{1}$$

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$$\underbrace{13}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$$

- Példa: Egy híján húsz.

$$\underbrace{13}_{1}\quad\underbrace{8}_{0}\quad\underbrace{5}_{1}\quad\underbrace{3}_{0}\quad\underbrace{2}_{\color{red}0}\quad\underbrace{1}$$

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

$$\underbrace{}_{32}\ \underbrace{}_{16}\ \underbrace{}_{8}\ \underbrace{}_{4}\ \underbrace{}_{2}\ \underbrace{}_{1}$$

- Példa: 19

32	16	8	4	2	1
0	1	0	0	1	1

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

$$\underbrace{}_{13}\ \underbrace{}_{8}\ \underbrace{}_{5}\ \underbrace{}_{3}\ \underbrace{}_{2}\ \underbrace{}_{1}$$

- Példa: Egy híján húsz.

13	8	5	3	2	1
1	0	1	0	0	1

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{32}\quad\underbrace{16}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

- Példa: 19

  $\underbrace{32}_{0}\quad\underbrace{16}_{1}\quad\underbrace{8}_{0}\quad\underbrace{4}_{0}\quad\underbrace{2}_{1}\quad\underbrace{1}_{1}$

- $$2017 = 11111100001_2$$

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{13}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

- Példa: Egy híján húsz.

  $\underbrace{13}_{1}\quad\underbrace{8}_{0}\quad\underbrace{5}_{1}\quad\underbrace{3}_{0}\quad\underbrace{2}_{0}\quad\underbrace{1}_{1}$

- $$2017 = 1001000010010001_F$$

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{32}\quad\underbrace{16}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

- Példa: 19

  $\underbrace{32}\quad\underbrace{16}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{4}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

  0 1 0 0 1 1

- $$2017 = 11111100001_2$$

- 1-gyel kezdődik, különben TETSZŐLEGES.

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

  $\underbrace{13}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

- Példa: Egy híján húsz.

  $\underbrace{13}\quad\underbrace{8}\quad\underbrace{5}\quad\underbrace{3}\quad\underbrace{2}\quad\underbrace{1}$

  1 0 1 0 0 1

- $$2017 = 1001000010010001_F$$

- 1-gyel kezdődik, NINCS két 1-es egymás mellett.

Kettes számrendszer vs Fibonacci-számrendszer

Kettes számrendszer

- Helyiértékek:

32	16	8	4	2	1

- Példa: 19

32	16	8	4	2	1
0	1	0	0	1	1

- $$2017 = 11111100001_2$$
- 1-gyel kezdődik, különben TETSZŐLEGES.
- Egyértelmű felírhatóság!

Fibonacci-számrendszer

- Helyiértékek:

13	8	5	3	2	1

- Példa: Egy híján húsz.

13	8	5	3	2	1
1	0	1	0	0	1

- $$2017 = 1001000010010001_F$$
- 1-gyel kezdődik, NINCS két 1-es egymás mellett.
- Egyértelmű felírhatóság!

Összeadás a kettes számrendszerben

Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) bináris számrendszerben megadott számot.

Összeadás a kettes számrendszerben

Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) bináris számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás $\rightarrow$ szabálytalan számok, „pénz számtan”

Összeadás a kettes számrendszerben

Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) bináris számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás $\rightarrow$ szabálytalan számok, „pénz számtan”
- $k_n + k_n = k_{n+1}$.

Összeadás a kettes számrendszerben

Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) bináris számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás $\rightarrow$ szabálytalan számok, „pénz számtan”
- $k_n + k_n = k_{n+1}$.
- Jobbról balra rendszerezett számolás.

Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) Fibonacci-számrendszerben megadott számot.

Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) Fibonacci-számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás $\rightarrow$ szabálytalan számok, „pénz számtan”

Összeadás a Fibonacci-számrendszerben

Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) Fibonacci-számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás $\rightarrow$ szabálytalan számok, „pénz számtan”
- $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$.

Összeadás a Fibonacci-számrendszerben

Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) Fibonacci-számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás $\rightarrow$ szabálytalan számok, „pénz számtan”
- $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$.
- $F_n + F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$, HA $n > 3$.

Összeadás a Fibonacci-számrendszerben

Alapfeladat

Adjunk össze két (vagy több) Fibonacci-számrendszerben megadott számot.

- Naív összeadás $\rightarrow$ szabálytalan számok, „pénz számtan”
- $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$.
- $F_n + F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$, HA $n > 3$.
- ????? Rendszerezett számolás ?????

Egy egyszerű összeadás

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1_F \\
+ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0_F \\
\hline
\end{array}
$$

Egy egyszerű összeadás

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1_F \\
+ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0_F \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0_F
\end{array}
$$

Tányérok: Az eredet

1964, 1966, 1968, 1984,

Tányérok: Az eredet

1964, 1966, 1968, 1984,

Ki miben tudós?

Tányérok: Az eredet

1964, 1966, 1968, 1984,

Ki miben tudós?

A döntő utolsó feladata

A döntő utolsó feladata

Egy asztalon egy sorban 6 tányér van. Ubul mindkét kezével megragad egy-egy tetszőleges tányért a hat közül, és mindkettőt egy hellyel jobbra vagy balra odébb helyezi (ha már van ott tányér, akkor annak a tetejére). Ezt ismételve el tudja-e érni, hogy az összes tányér egy oszlopba kerüljön ?

Tányérok

A feladat: asztal, tányérok, pakolás.

Ki Miben Tudós megoldás

A feladat: asztal, tányérok, pakolás.

A megoldás: terítő.

A feladat: asztal, tányérok, pakolás.

A megoldás: terítő.

A feladat: asztal, tányérok, pakolás.

A megoldás: terítő.

Paritásos meggondolás.

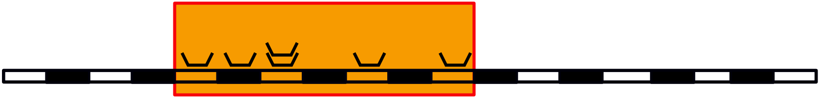
Egy új feladat

Egy új feladat

Egy asztalon egy sorban valahány, valahogy elosztott tányér van. Ubul mindkét kezével megragad egy-egy tetszőleges tányért amelyek egymás tetején vannak. Az egyiket egy hellyel balra, a másikat két hellyel jobbra odébb helyezi (ha már van ott tányér, akkor annak a tetejére). Ezt ismételve el tudja-e érni, hogy az összes tányér különböző helyre kerüljön ?

A megoldás

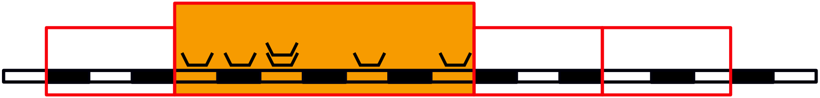
A megoldás



A megoldás menete:

- A kiinduló tányér-konfiguráció tartójának definíciója.

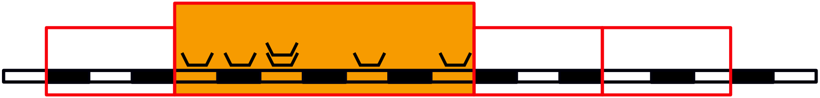
A megoldás



A megoldás menete:

- A kiinduló tányér-konfiguráció tartójának definíciója.
- A tartón kívüli rész hármasokra bontása.

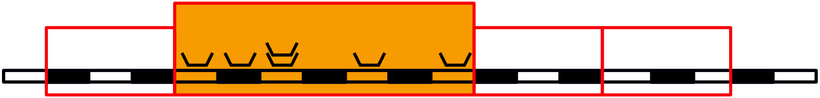
A megoldás



A megoldás menete:

- A kiinduló tányér-konfiguráció tartójának definíciója.
- A tartón kívüli rész hármasokra bontása.
- HA egy hármasba tányér kerül, akkor ott MARAD is tányér.

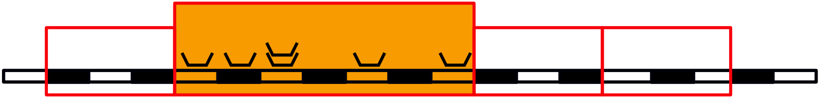
A megoldás



A megoldás menete:

- A kiinduló tányér-konfiguráció tartójának definíciója.
- A tartón kívüli rész hármasokra bontása.
- HA egy hármasba tányér kerül, akkor ott MARAD is tányér.
- A tányér-konfiguráció szélessége nem nőhet korlátlanul.

A megoldás



A megoldás menete:

- A kiinduló tányér-konfiguráció tartójának definíciója.
- A tartón kívüli rész hármasokra bontása.
- HA egy hármasba tányér kerül, akkor ott MARAD is tányér.
- A tányér-konfiguráció szélessége nem nőhet korlátlanul.
- A súlypont monoton módon mozog.

Stolarsky-táblázat

1	2	3	5	8	13	21	34	55	$\cdots$
4	6	10	16	26	42	68	110	178	$\cdots$
7	11	18	29	47	76	123	199	322	$\cdots$
9	15	24	39	63	102	165	267	432	$\cdots$
12	19	31	50	81	131	212	343	555	$\cdots$
14	23	37	60	97	157	254	411	665	$\cdots$
17	28	45	73	118	191	309	500	809	$\cdots$
20	32	52	84	136	220	356	576	932	$\cdots$
22	36	58	94	152	246	398	644	1042	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Stolarsky-táblázat

1	2	3	5	8	13	21	34	55	⋯
4	6	10	16	26	42	68	110	178	⋯
7	11	18	29	47	76	123	199	322	⋯
9	15	24	39	63	102	165	267	432	⋯
12	19	31	50	81	131	212	343	555	⋯
14	23	37	60	97	157	254	411	665	⋯
17	28	45	73	118	191	309	500	809	⋯
20	32	52	84	136	220	356	576	932	⋯
22	36	58	94	152	246	398	644	1042	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Tétel

Minden Fibonacci-sémának eleget tevő sorozat „benne van” a Stolarsky-táblázatban.

Fibonacci-séma

Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

Példák

Fibonacci-séma

Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

Példák

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Fibonacci-séma

Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

Példák

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

$$1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Fibonacci-séma

Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

Példák

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

$$1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$$

Fibonacci-séma

Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

Példák

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

$$1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$$

$$1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7, \varphi^8, \dots$$

Fibonacci-séma

Definíció

Egy sorozat Fibonacci-sémájú, ha a harmadiktól kezdve mindegyik tagja az előző kettő tagjának összege.

Példák

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

$$1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$$

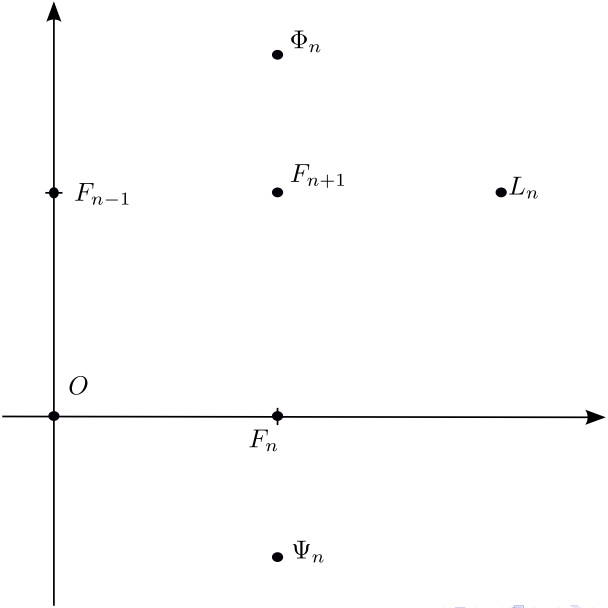
$$1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7, \varphi^8, \ldots$$

$$1, -\varphi^{-1}, \varphi^{-2}, -\varphi^3, \varphi^4, -\varphi^{-5}, \varphi^{-6}, -\varphi^{-7}, \varphi^{-8}, \ldots$$

Fibonacci-sémájú sorozatok: Elég az első két tag ismerete

Sorozat/σ_n	Első tag/σ_0	Második tag/σ_1
O_n	0	0
F_n	0	1
F_{n-1}	1	0
F_{n+1}	1	1
L_n	2	1
Φ_n :	1	φ
Ψ_n :	1	$-1/\varphi$

Számpárok? Koordináta geometria!



$(a, b) = a \cdot \mathbf{i} + b \cdot \mathbf{j}$

$$\Phi_n = 1 \cdot F_{n-1} + \varphi \cdot F_n.$$

$$\Psi_n = 1 \cdot F_{n-1} - \frac{1}{\varphi} \cdot F_n.$$

Binet-képlet

Tétel (Euler, Daniel Bernoulli, de Moivre, Binet)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\rfloor.$$

Köszönöm a figyelmet!