



A 2008/2009. tanévi FIZIKA Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első fordulójának

feladatai és megoldásai

II. kategória

A dolgozatok elkészítéséhez minden segédeszköz használható. Megoldandó az első három feladat és a 4./A és 4./B sorszámú feladatok közül egy szabadon választott. Csak 4 feladat megoldására adható pont. Ha valaki 5 feladat megoldását küld be, a 4./A és 4./B feladat közül a több pontot elérő megoldást vesszük figyelembe.

Minden feladat teljes megoldása 20 pontot ér.

Részletes, egységes pontozás nem adható meg a feladatok természetéből következően, ugyanis egy-egy helyes megoldáshoz több különböző, egyenértékű helyes út vezethet.

A feladat numerikus végeredményével megközelítően azonos eredményt kihozó megoldó erre a részfeladatra 0 pontot kap, amennyiben elvileg helytelen úton jut el. Fizikailag értelmes gondolatmenet estén a kis numerikus hiba elkövetése miatt (a részfeladat terjedelmétől függően) 2 – 3 pont vonható le.

1. Mennyi ideig esett az 5 m/s kezdősebességgel vízszintesen elhajított test, amely a kidobás helyétől 20 m-re került?

Megoldás:

Adatok: $\alpha = 0$, $v_0 = 5$ m/s, $r = 20$ m

A test elmozdulás-vektorának hossza a két koordinátájának négyzetösszegéből vont négyzetgyökkel egyenlő:

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 = x^2 + y^2,$$

(ha az origóból dobtuk el a testet). Ezek a koordináták az idő függvényében felírhatók, amivel a megadott elmozdulás:

$$r^2 = (v_0 t)^2 + \left(\frac{1}{2} g t^2\right)^2.$$

Rendezés után:

$$g^2 t^4 + 4v_0^2 t^2 - 4r^2 = 0.$$

Ennek megoldása t^2 -re (csak a pozitív megoldást megtartva):

$$t^2 = \frac{-4v_0^2 + \sqrt{16v_0^4 + 16g^2r^2}}{2g^2} = \frac{2v_0^2}{g^2} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2r^2}{v_0^4}} - 1 \right).$$

Innen az eltelt idő:

$$t = \frac{v_0}{g} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{1 + \frac{g^2r^2}{v_0^4}} - 1 \right)} = \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{1 + \frac{100 \text{ m}^2\text{s}^{-4} \cdot 400 \text{ m}^2}{625 \text{ m}^4\text{s}^{-4}}} - 1 \right)} = 1,88 \text{ s}.$$

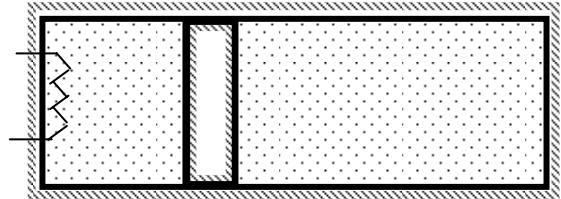
Ellenőrzés:

$$x = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,88 \text{ s} = 9,4 \text{ m}$$

$$y = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,88^2 \text{ s}^2 = 17,67 \text{ m}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9,4^2 \text{ m}^2 + 17,67^2 \text{ m}^2} = \sqrt{400,59 \text{ m}^2} = 20,01 \text{ m} \approx 20 \text{ m}.$$

2. A teljesen hőszigetelő falú gáztartályt hőszigetelő, könnyen mozgó és rögzítetlen dugattyú osztja ketté, éspedig kezdetben úgy, hogy a dugattyútól jobbra eső gáztérfogat kétszerese a baloldalinak. Mindkét térfogatrészben ugyanaz a gáz van, kezdetben ugyanakkora hőmérsékleten és ugyanakkora nyomáson. A baloldali részt elhanyagolható térfogatú elektromos fűtőszállal lehet melegíteni. A fűtőszállal a baloldali gázt felmelegítjük annyira, hogy térfogata kétszeresére nő.



Hányszorosa lesz a baloldali gáz új hőmérséklete a jobboldali gáz új hőmérsékletének?

Megoldás:

Legyen a kiinduló közös hőmérséklet T_1 , a mindkét oldali nyomás p_1 , a baloldali térfogat V_1 . Mindkét oldali gázra felírjuk az egyesített gáztörvényt, illetve a jobboldali részre adiabatikus változást leíró Poisson-egyenletet. Tehát a baloldali részre:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 2V_1}{T_2},$$

ahol a kettes index a felmelegítés utáni állapotjelzőket jelöli. A jobboldali részre egyrészt

$$\frac{p_1 2V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_1}{T_3},$$

ahol T_3 a jobboldali gáz adiabatikus felmelegedése következtében beálló hőmérséklete, másrészt

$$p_1(2V_1)^\kappa = p_2V_1^\kappa,$$

ahol κ a tartályban lévő gáz $\frac{c_p}{c_v}$ hányadosa. Innen $p_2 = 2^\kappa p_1$ adódik. Ezt a baloldali gázrész

egyesített gáztörvényébe beírva, T_2 -re azt kapjuk, hogy $T_2 = 2^{\kappa+1} \cdot T_1$.

Hasonlóan a jobboldali gázrész egyesített gáztörvényéből T_3 hőmérsékletre

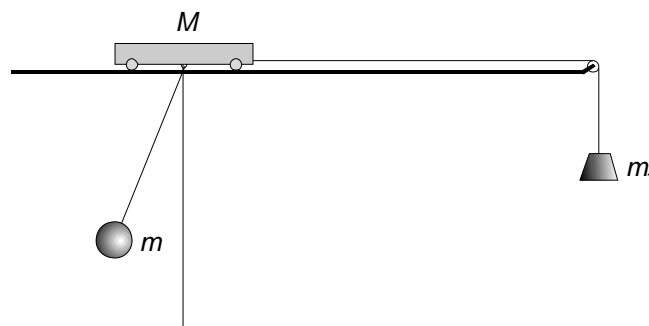
$$T_3 = 2^{\kappa-1} \cdot T_1$$

adódik. A két utóbbi eredményt egyesítve a feltett kérdésre adandó választ:

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{2^{\kappa+1} \cdot T_1}{2^{\kappa-1} \cdot T_1} = 2^2 = 4,$$

vagyis $T_2 = 4T_3$. Ha tehát a baloldali gázrészt annyira felmelegítjük, hogy térfogata kétszeresére nő, más szóval térfogatot cserél a jobboldalival, akkor új hőmérséklete négyszerese lesz a jobboldali rész beálló hőmérsékletének.

3. *Vízszintes sínen könnyen gördülő $M = 6$ kg tömegű kocsirol vékony szálon $m = 4$ kg tömegű teher lóg le az ábra szerint. A kocsihoz kötött, csigán átvett fonál másik végére $m_1 = 8$ kg tömegű nehezék van erősítve, amelyet kezdetben nyugalomban tartunk. A nehézségi gyorsulás $g = 10$ m/s².*



a) Mekkora szöget zárjon be a teher fonala a függőlegessel, hogy a terhet és a nehezéket egyszerre elengedve ez a szög a mozgás során végig állandó maradjon?

b) Mekkora erőt fejtenek ki a fonalak? (Az indításkor a fonalszakaszok egyenesek.)

Megoldás.

Adatok: $M = 6$ kg; $m = 4$ kg; $m_1 = 8$ kg.

a) Ha a fonál iránya nem változik, a kocsi és a teher egyetlen merev rendszernek tekinthető, így gyorsulásuk megegyezik. A mozgásegyenlete a teherre:

$$m_1g - K = m_1a,$$

míg a kocsi + nehezékre:

$$K = (M + m)a.$$

(Függőleges irányban a kocsi nem gyorsul.)

A fenti két egyenletből a gyorsulásra:

$$a = \frac{m_1}{m_1 + M + m} \cdot g.$$

adódik. Továbbá amint az az ábráról látható:

$$mgtg\varphi = ma.$$

Innen

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{g} = \frac{m_1}{m_1 + M + m} = \frac{8}{4 + 6 + 8} = \frac{4}{9}.$$

Így a keresett szög nagysága:

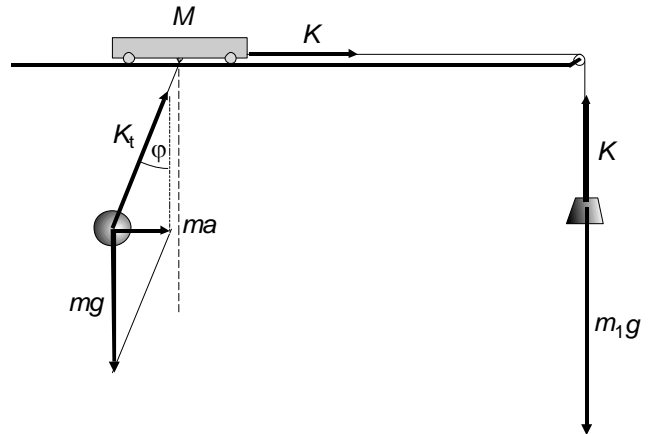
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{9} \approx 24^\circ$$

A nehezékre ható fonálerő:

$$K = (M + m)a = \frac{(M + m)m_1}{M + m + m_1}g = \frac{(6 + 4)8 \text{ kg}^2}{(6 + 4 + 8) \text{ kg}} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx \mathbf{44,4 \text{ N}}.$$

A teherre ható fonálerő pedig

$$K_t = \frac{mg}{\cos\varphi} = \frac{4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 24^\circ} = \mathbf{43,8 \text{ N}}.$$



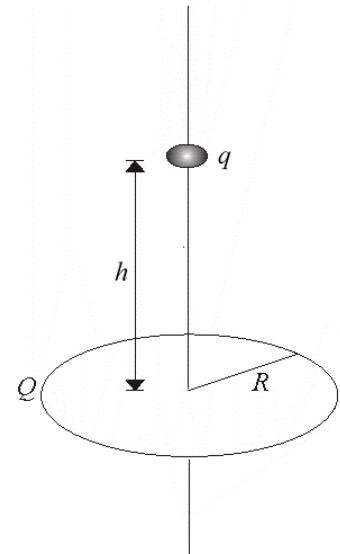
4/A. A \$Q\$ elektromos töltésű, \$R\$ sugarú, vízszintes síkú karika szimmetriatengelyén lévő szigetelőanyagból készült rúdon súrlódás nélkül mozoghatnak gyöngyszemek.

a) A karika középpontjától messziről lassan mozgatunk lefelé egy q elektromos töltésű gyöngyöt. Mekkora a gyöngy tömege, ha a karika közepétől h_1 távolságra már nem kell tartanunk? Milyen jellegű a gyöngy egyensúlyi helyzete?

b) Egy másik alkalommal a karika középpontjától lassan mozgatunk felfelé egy másik gyöngyöt, amelynek elektromos töltése szintén q . Mekkora ennek a gyöngynek a tömege, ha a karika közepétől h_2 távolságra már nem kell emelnünk? Milyen jellegű a gyöngy újabb egyensúlyi helyzete?

c) Az m_3 tömegű, q elektromos töltésű gyöngynek van-e egyensúlyi helyzete a karika szimmetriatengelyén? Ha van, akkor hol? Ha nincs, akkor miért nincs?

Adatok: $Q = 10^{-6}$ C, $R = 10$ cm, $q = 10^{-7}$ C, $h_1 = 10$ cm, $h_2 = 3$ cm, $m_3 = 4$ g, $g = 10$ m/s².



Megoldás:

Először adjuk meg az elektromos töltéssel rendelkező karika elektromos terét a szimmetriatengely mentén.

Osszuk fel a kör területét sok kicsi, ΔQ elektromos töltésű részre. A karika középpontjától h távolságra az elektromos térerősséget megkapjuk a ΔQ elemi töltések által okozott ΔE elektromos térerősségek ΔE_y függőleges komponenseinek összegeként:

$$E_{(h)} = \sum k \cdot \frac{\Delta Q}{R^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

Az összegből emeljük ki az állandó tényezőket:

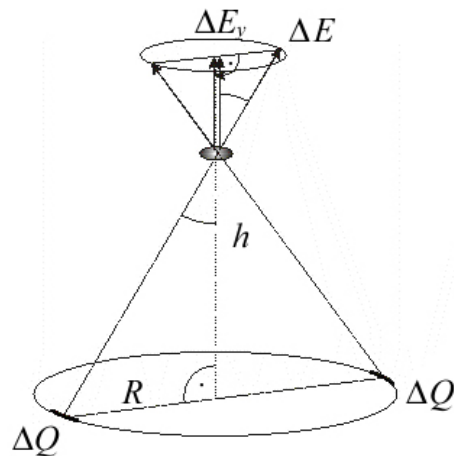
$$E_{(h)} = \frac{k \cdot h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum \Delta Q$$

A $\sum \Delta Q$ összeg a kör mentén Q -val egyenlő. Így

$$E_{(h)} = k \cdot \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q.$$

A h magasságban lévő q elektromos töltésre ható elektromos erő felfelé mutat, nagysága:

$$F_{(h)} = k \cdot \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q \cdot q.$$



Ez az erő a $h = 0$, valamint a $h = \infty$ helyen nulla értéket, közben pozitív értéket vesz fel. Vizsgáljuk meg, hol veszi fel a legnagyobb értékét?

1. módszer:

A $h-x$ (x sokkal kisebb mint h) helyen az elektromos erő értéke:

$$F^* = F_{(h-x)} = k \cdot \frac{h-x}{\left(R^2 + (h-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q \cdot q.$$

Vizsgáljuk külön az:

$$N = \left(R^2 + (h-x)^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left(R^2 + h^2 - 2hx + x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

mennyiséget. Ha x sokkal kisebb mint h , akkor x^2 elhanyagolható az összegben, valamint a kiemelés után:

$$N = \left(R^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot h}{R^2 + h^2} \cdot x\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Kicsi x esetén használható a $(1-x)^\alpha \approx 1 - \alpha \cdot x$ közelítés. Így

$$N = \left(R^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot h}{R^2 + h^2} \cdot x\right).$$

A maximum helyen az F^* / F hányados értéke kis x értékekre nem tartalmazhat x -ben lineáris tagot, csak x^2 -tel arányosat. Írjuk fel az

$$\frac{F^*}{F} = \frac{k \cdot Q \cdot q \cdot (h-x)}{\left(R^2 + (h-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\left(R^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}{k \cdot Q \cdot q \cdot h}$$

hányadost, majd használjuk fel a fenti közelítést. Ekkor x -ben lineáris tagokig bezárólag

$$\frac{F^*}{F} \approx 1 - \frac{x}{h} + \frac{3 \cdot h}{R^2 + h^2} \cdot x.$$

Így annak feltétele, hogy ne legyen x -ben lineáris tag az, hogy

$$\frac{3 \cdot h}{R^2 + h^2} - \frac{1}{h} = 0.$$

Ebből h értéke könnyedén megkapható: $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R$.

Tehát, a $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R = 7,07$ cm magasságban a gyöngyre ható erő maximális, értéke

$$F_{\max} = k \cdot \frac{h}{\left(\frac{3}{2} \cdot R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q \cdot q.$$

Az adatokat behelyettesítve: $F_{\max} = 0,0346 \text{ N}$.

2. módszer:

A maximum helyet megkapjuk differenciálszámítással is. Milyen h esetén lesz az első derivált nulla?

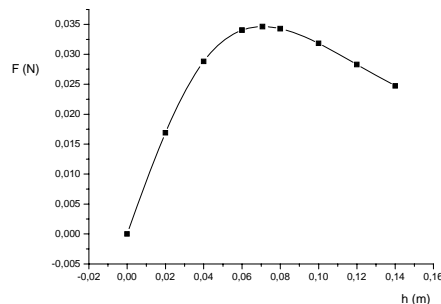
$$F_{(h)}' = \left(k \cdot \frac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q \cdot q \right)' = \frac{k \cdot Q \cdot q}{(R^2 + h^2)^3} \cdot \left[1 \cdot (R^2 + h^2)^3 - h \cdot \frac{3}{2} \cdot (R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot h \right]$$

Elég azt vizsgálni, hogy a szögletes zárójelben lévő kifejezés milyen h esetén nulla:

$$(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot (R^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \cdot h^2.$$

Az egyszerűsítések és a lehetséges összevonás után: $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R$ adódik.

(Az F^* függvény második deriváltja a $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R$ helyen negatív, ami azt jelenti, hogy ezen a helyen valóban maximuma van a függvénynek.)



$$\text{Az } F_{(h)} = \frac{0,0009 \cdot h}{(0,01 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ elektromos erő- hely grafikon}$$

Ha a gyöngy olyan h helyen van egyensúlyban, ahol $0 < h < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R$, akkor az elektromos erő hely-függvénye növekedő, ezért az egyensúlyi helyzet labilis. (Ha a testet kicsit lefelé elmozdítjuk, akkor az elektromos erő csökken, így a test tovább esik lefelé.)

Ha a gyöngy olyan h helyen van egyensúlyban, ahol $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R < h$, akkor az elektromos erő hely-függvénye csökkenő, ezért az egyensúlyi helyzet stabilis.

Ilyen megfontolások után válaszoljunk a feladat kérdéseire:

a) A karika középpontjától h_1 távolságra lévő gyöngy egyensúlyban van, a rá ható elektromos-, és nehézségi erő nagysága egyenlő:

$$k \cdot \frac{h_1}{(R^2 + h_1^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q \cdot q = m_1 \cdot g .$$

Ebből m_1 kifejezhető:

$$m_1 = \frac{k}{g} \cdot \frac{h_1}{(R^2 + h_1^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q \cdot q = 3,182 \text{ g}$$

(A q töltésű gyöngy tömege $m_1 = 3,182 \text{ g}$.)

Mivel a fenti egyenlet megoldása $h_1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R$, ezen a helyen az elektromos erő helyszerinti függvénye csökkenő, ez a hely **stabilis egyensúlyi helyzet**.

b) A karika középpontjától h_2 távolságra lévő gyöngy egyensúlyban van, a rá ható elektromos-, és nehézségi erő nagysága szintén egyenlő:

$$k \cdot \frac{h_2}{(R^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q \cdot q = m_2 \cdot g .$$

Ebből m_2 kifejezhető:

$$m_2 = \frac{k}{g} \cdot \frac{h_2}{(R^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot Q \cdot q = 3,22 \text{ g}$$

(A q töltésű gyöngy tömege $m_2 = 2,37 \text{ g}$.)

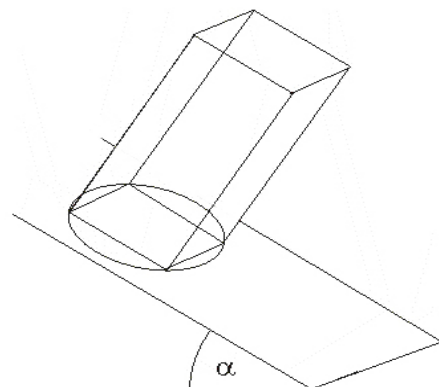
Mivel ekkor $h_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R$, ezen a helyen az elektromos erő helyszerinti függvénye növekedő, ez a hely **labilis egyensúlyi helyzet**.

c) Az $m_3 = 4 \text{ g}$ tömegű gyöngyre ható $0,04 \text{ N}$ nehézségi erő nagyobb az elektromos erő

$F_{\max} = 0,0346 \text{ N}$ legnagyobb értékénél. Ezért ennek a gyöngynek **nem lesz egyensúlyi helyzete**.

4/B. Egy homogén anyagú, négyzet alapú, egyenes hasáb mindkét kisebb oldaléle 10 cm , a nagyobbik 20 cm . A téglatest egyik csúcsával lefelé elhelyezve nem csúszik le a 30° -os lejtőn.

a) Legalább mekkora a lejtő és a test között a tapadási súrlódási együttható?



b) A testet a kisebb lapjával a lejtőre helyezük. A helyzete a lejtőhöz képest véletlenszerű. Az elengedése után mekkora valószínűséggel borul fel a test?

(A véletlenszerű lejtőre helyezés lényege a következő: A lejtőre rajzolunk egy kört, melynek átmérője megegyezik a test kisebb lapjának átlójával. A hasábot minden alkalommal úgy helyezük a lejtőre, hogy az alsó négy csúcsa a körre illeszkedjen, valamint bármely csúcsa ugyanakkora valószínűséggel kerüljön a körvonal bármelyik 1 cm hosszú ívére.)

Megoldás:

Adatok: $\alpha = 30^\circ$, $a = 10$ cm

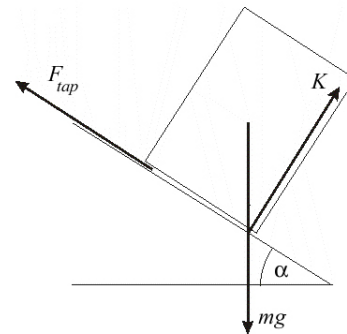
a) A test a lejtőn egyensúlyban van. Ennek feltétele, hogy a testre ható erők eredője nulla.

A lejtőre merőlegesen két erő hat a testre: a nehézségi erő lejtőre merőleges $m \cdot g \cdot \cos \alpha$ komponense, és a lejtő által kifejtett K kényszererő, amelyek ellentétes irányúak és azonos nagyságúak:

$$K = m \cdot g \cdot \cos \alpha .$$

A lejtővel párhuzamosan szintén két erő hat a testre: a nehézségi erő lejtővel párhuzamos $m \cdot g \cdot \sin \alpha$ komponense, és a lejtő által kifejtett tapadási erő. Egyensúlyban

$$F_{\text{tap}} = m \cdot g \cdot \sin \alpha .$$



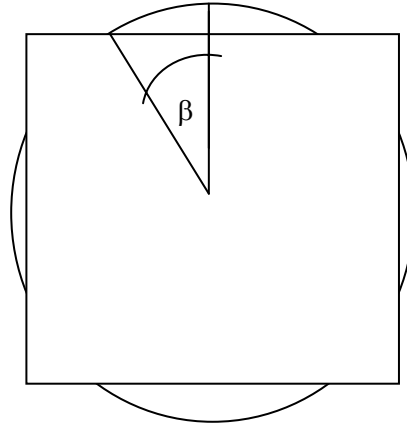
A szükséges tapadási súrlódási együttható legkisebb értékét akkor kapjuk, ha a testre a tapadási erő maximuma hat, azaz $F_{\text{tap}} = \mu_0 \cdot F_{\text{ny}}$. A fenti egyenletek, valamint az $F_{\text{ny}} = K$ feltétel figyelembevételével adódik:

$$\mu_0 = \tan \alpha = 0,58 .$$

A tapadási súrlódási együttható **legalább 0,58** kell legyen.

b) A lejtőre helyezett téglatest akkor nem billen meg, ha a rá ható három (nem párhuzamos) erő hatásvonala egy pontban metszi egymást. Az F_{tap} tapadási erő és a K kényszererő a hasáb lejtővel érintkező lapjának valamelyik pontjában metszi egymást. Ezért a megbillenésnek az a feltétele, hogy az mg nehézségi erő hatásvonala a négyzet alakú alaplapon kívül messe a lejtőt. A hasáb középpontja $a = 10$ cm-re van a lejtő síkjától. A nehézségi erő ebben a pontban hat a testre. Hatásvonala $r = a \cdot \tan \alpha = 0,58 \cdot a$ -ra dőfi a lejtőt a hasáb lejtőre illeszkedő lapjának középpontjától. Rajzoljuk meg a közös középpontú a oldalú négyzetet, és az r sugarú kört. A hasáb akkor borul fel, ha a nehézségi erő hatásvonala a négyzet alakú alaplapon kívül metszi az r sugarú kört. Határozzuk meg az ábrán jelölt β szöget

$$\cos \beta = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{\frac{a}{2}}{a \cdot \tan \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$



A felborulás valószínűsége: $w = \frac{8 \cdot \beta}{360^\circ} = \frac{2}{3} = 66,7\%$. Ez azt jelenti, hogy az esetek **2/3** részében a hasáb felborul, **1/3** részében megáll.



Pontozási útmutató II. kategória:

1. feladat

Az elmozdulás nagyságának a keresett idővel való helyes kifejezése: **8 pont**

A t^2 -ben vegyes másodfokú egyenlet helyes felírása: **4 pont**

Az egyenlet t^2 -re való helyes megoldása: **2 pont**

Az egyenletből t reális értékének helyes kiszámítása: **6 pont**

2. feladat

A baloldali részre a gáztörvény felírása: **4 pont**

A jobboldali részre a gáztörvény felírása: **4 pont**

A jobboldali gáz adiabatikus egyenletének felírása: **4 pont**

A jobboldali rész hőmérsékletének megadása: **3 pont**

A baloldali rész hőmérsékletének megadása: **3 pont**

A két hőmérséklet aránya: **2 pont**

3. feladat

Annak felismerése, hogy a kocsi és a teher a folyamat alatt merev rendszerként viselkedik: **5 pont**

A két mozgásegyenlet helyes felírása: **4 pont**

A gyorsulás-nagyságok meghatározása: **2 pont**

A keresett szög meghatározása: **5 pont**

A két fonálerő helyes meghatározása egyenként **2-2 pont**

4/A feladat

A karika szimmetriatengelyén lévő gyöngyre ható elektromos erő megadása a karika középpontjától mért távolság függvényében: **2 pont**

Az elektromos erő – hely függvény jellemzése, a maximum helyének és értékének megadása: **4 pont**

Az egyensúlyi helyzet milyenségének (stabilis, labilis) jellemzése a hely függvényében: **2 pont**

a)

Az egyensúlyi helyzet dinamikai feltételének megfogalmazása: **1 pont**

A gyöngy tömegének kifejezése és numerikus megadása: **2 pont**

Az egyensúlyi helyzet jellegének megadása indoklással: **2 pont**

b)

Az egyensúlyi helyzet dinamikai feltételének megfogalmazása: **1 pont**

A gyöngy tömegének kifejezése és numerikus megadása: **2 pont**

Az egyensúlyi helyzet jellegének megadása indoklással: **2 pont**

c)

Annak felismerése, hogy a gyöngyre ható nehézségi erő nagyobb, mint az elektromos erő legnagyobb értéke: **1 pont**

Az egyensúlyi helyzet hiányának kimondása: **1 pont**

4/B feladat

a)

A lejtőre helyezett test egyensúlyának dinamikai feltétele: **2 pont**

A tapadási súrlódási együttható legkisebb értékének meghatározása: **2 pont**

b)

A téglatest megbillenésének feltétele: **4 pont**

A nehézségi erő hatásvonalával a lejtőtől kimetszett pont és a hasáb lejtőre illeszkedő lapjának középpontja közötti r távolság meghatározása: **4 pont**

A téglatest felborulását jellemző β szög meghatározása: **4 pont**

A felborulás valószínűségének megadása: **4 pont**.